BAB 2

BARISAN BILANGAN REAL

Di sekolah menengah barisan diperkenalkan sebagai kumpulan bilangan yang disusun menurut "pola" tertentu, misalnya barisan aritmatika dan barisan geometri. Biasanya barisan dan deret merupakan satu kesatuan pokok bahasan. Sekarang barisan dipahami dari sudut pandang analisis dan ia merupakan bentuk khusus dari fungsi. Sedangkan deret akan dibahas secara khusus pada bab yang lain.

2.1 Pengertian Barisan dan Limitnya

Definisi 2.1.1. Barisan bilangan real adalah fungsi suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan domain termuat didalam $\mathbb{R}$. Jadi barisan adalah fungsi $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dimana setiap $n \in \mathbb{N}$ nilai fungsi $X(n)$ biasa ditulis sebagai

$$X(n) := x_n$$

dan disebut **suku ke-n** barisan X. Notasi barisan yang sering digunakan dalam buku ini adalah

$$X, \quad (x_n), \quad (x_n : n \in \mathbb{N}).$$

Contoh 2.1.1. Beberapa barisan dan cara penulisannya :

a. $X := (2, 4, 6, 8, \cdots)$ merupakan barisan bilangan genap. Dapat juga ditulis sebagai $X := (2n : n \in \mathbb{N})$.

b. $Y := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$. Dapat juga ditulis $Y := \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$.

   Dalam beberapa keperluan praktis, barisan didefinisikan secara rekusif atau induktif sebagai berikut

$$\begin{cases} x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \text{ diberikan,} \\ x_n := f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}). \end{cases}$$

c. Barisan Fibonacci adalah barisan yang berbentuk $F := (1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$. Barisan ini dapat ditulis secara rekursif sebagai berikut :

$$x_1 := 1, x_2 := 1, x_n := x_{n-1} + x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 3.$$

Latihan 2.1.1. Berikut diberikan beberapa suku awal barisan (x_n). Seandainya pola seperti ini tetap, tentukan formula umum suku ke n nya.

a. $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \cdots,$

b. $1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \cdots,$

c. $1, 4, 9, 16, \cdots,$

Latihan 2.1.2. Diberikan barisan yang didefinisikan secara rekursif. Tentukan 5 suku pertamanya

a. $y_1 := 2, \quad y_{n+1} := \frac{1}{2}(y_n + 2/y_n), n \geq 1.$

b. $z_1 := 1, \quad z_2 := 2, \quad z_{n+2} := (z_{n+1} + z_n)/(z_{n+1} - z_n), n \geq 3.$

c. $x_1 := 1, \quad y_{n+1} := \frac{1}{4}(2y_n + 3), n \geq 1.$

Penulisan barisan menggunakan kurung biasa "( )" dimaksudkan untuk membedakannya dengan himpunan yang biasa ditulis menggunakan kurung kurawal "{ }". Pada himpunan, anggota yang sama cukup ditulis satu kali. Sedangkan pada barisan, suku-suku yang berbeda memungkinkan mempunyai nilai yang sama. Sebagai contoh ambil barisan (x_n) yang didefinisikan $x_n := (-1)^n$. Jadi barisannya adalah

$$X := (-1, 1, -1, 1, \cdots).$$

Tetapi bila dipandang sebagai himpunan maka diperoleh himpunan

$$X := \{-1, 1\}.$$

Definisi 2.1.2 (Limit barisan). Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real. Bilangan real x dikatakan limit dari (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N (biasanya bergantung pada ε) sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Jika x limit dari barisan X maka X dikatakan konvergen ke x dan ditulis

$$\lim X = x, \text{ atau } \lim(x_n) = x.$$

Jika suatu barisan mempunyai limit kita katakan barisan itu **konvergen**. Sebaliknya jika tidak mempunyai limit kita katakan ia **divergen**.

Gambar 2.1: Kekonvergenan barisan

Diperhatikan pada definisi ini pernyataan $|x_n - x| < \varepsilon$ dapat ditulis sebagai $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Ini berarti pada suatu saat, semua suku-suku barisan berada dalam "kerangkeng" $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Ilustrasi geometris barisan (x_n) yang konvergen ke x diberikan pada Gambar 2.1.

Kadangkala digunakan notasi $x_n \to x$ untuk menyatakan secara intuitif bahwa x_n "mendekati" x bila $n \to \infty$. Pada definisi ini kriteria x_n "mendekati" x diukur oleh $\varepsilon > 0$, sedangkan kriteria $n \to \infty$ dicirikan oleh adanya bilangan asli N. Tidak adanya notasi $n \to \infty$ pada penulisan $\lim(x_n)$ dapat dipahami karena barisan yang dibahas adalah barisan takberujung, yaitu banyak sukunya takterhingga.

Muncul pertanyaan apakah mungkin suatu barisan konvergen ke dua limit yang berbeda ? Jawaban diberikan secara formal dalam teorema berikut.

Teorema 2.1.1. *Suatu barisan bilangan real hanya dapat mempunyai satu limit. Dengan kata lain, jika suatu barisan konvergen maka limitnya tunggal.*

Bukti. Andaikan barisan $X := (x_n)$ mempunyai dua limit yang berbeda, katakan x_a dan x_b dengan $x_a \neq x_b$. Diberikan $\varepsilon := \frac{1}{3}|x_b - x_a|$.
Karena $\lim(x_n) = x_a$ maka untuk ε ini terdapat N_a sehingga

$$|x_n - x_a| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_a.$$

Juga, karena $\lim(x_n) = x_b$ maka terdapat N_b sehingga

$$|x_n - x_b| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_b.$$

Sekarang untuk $n \geq$ maks $\{N_a, N_b\}$ maka berlaku

$$\begin{aligned} |x_a - x_b| &= |x_a - x_n + x_n - x_b| \\ &\leq |x_n - x_a| + |x_n - x_b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|x_a - x_b|. \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh $|x_a - x_b| < \frac{2}{3}|x_a - x_b|$ suatu pernyataan yang kontradiksi. Pengandaian $x_a \neq x_b$ salah dan haruslah $x_a = x_b$, yaitu limitnya mesti tunggal. $\square$

Latihan 2.1.3. Diberikan barisan bilangan real (x_n).

a. Tuliskan definisi barisan (x_n) tidak konvergen ke x.

b. Tuliskan definisi barisan (x_n) divergen.

Pembahasan barisan di sini ditekankan pada pembuktian-pembuktian teoritis bukan pada aspek teknik komputasi. Membuktikan suatu barisan dengan limit telah diketahui lebih rumit daripada menentukan nilai limit suatu barisan. Contoh-contoh berikut memberikan gambaran bagaimana definisi digunakan untuk membuktikan kebenaran limit suatu barisan.

Contoh 2.1.2. Butkikan bahwa $\lim(1/n) = 0$.

PENYELESAIAN. Disini kita mempunyai $x_n := \frac{1}{n}$, dan $x = 0$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Harus ditemukan bilangan asli N sehingga

$$|x_n - x| = |1/n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Mudah saja, pada bentuk terakhir ketidaksamaan ini berlaku $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Diselesaikan, diperoleh $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Jadi N cukup diambil sebagai bilangan asli terkecil yang lebih besar dari $\frac{1}{\varepsilon}$. Sebagai contoh, misalkan diberikan $\varepsilon := 0.013$ maka $\frac{1}{\varepsilon} = 76.9231$. Jadi cukup diambil $N := 77$. Untuk meyakinkan dapat diperiksa bahwa

$$x_{77} = 0.0130, x_{78} = 0.0128, x_{79} = 0.0127, x_{80} = 0.0125, x_{81} = 0.0123, x_{82} = 0.0122$$

kesemuanya kurang dari 0.013. Lebih telitinya $x_{77} = 0.012987$. $\square$

Contoh 2.1.3. Buktikan $\lim\left(\frac{n+1}{3n+2}\right) = 1/3$.

PENYELESAIAN. Disini kita mempunyai $x_n := \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)$ dan $x = 1/3$.

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= \left|\frac{n+1}{3n+2} - \frac{1}{3}\right| \\ &= \left|\frac{3n+3-3n-2}{3(3n+2)}\right| \\ &= \frac{1}{3(3n+2)} \end{aligned}$$

Bentuk terakhir ini akan kurang dari ε bila

$$(9n+6)\varepsilon > 1 \Leftrightarrow 9n > \frac{1-6\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{6-\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Jadi N cukup diambil sebagai bilangan asli terkecil yang lebih besar dari $\frac{6-\varepsilon}{9\varepsilon}$. Sebagai contoh, misalkan diberikan $\varepsilon := 0.013$ maka $\frac{6-\varepsilon}{9\varepsilon} = 7.8803$. Jadi cukup diambil $N := 8$. Agar lebih meyakinkan diambil beberapa nilai $x_n - 1/3$, untuk $n = 8, 9, 10, 11, 12$, hasilnya

$$0.0128, \quad 0.0115, \quad 0.0104, \quad 0.0095, \quad 0.0088,$$

yang kesemuanya kurang dari $\varepsilon := 0.013$. $\square$

Latihan 2.1.4. Gunakan definisi limit barisan untuk membuktikan

$$\lim \left(\frac{3n+1}{2n+5} \right) = \frac{3}{2}.$$

Tentukan bilangan asli terkecil N yang dapat diambil jika diberikan $\varepsilon := 0.0023$, juga bila $\varepsilon := 0.0132$.

Latihan 2.1.5. Gunakan definisi limit barisan untuk membuktikan

$$\lim \left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right) = 0.$$

Tentukan bilangan asli terkecil N yang dapat diambil jika diberikan $\varepsilon := 1/4$, juga bila $\varepsilon := 1/16$.

Latihan 2.1.6. Gunakan definisi limit barisan untuk membuktikan

$$\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0.$$

Tentukan bilangan asli terkecil N yang dapat diambil jika diberikan $\varepsilon := 1/4$, juga bila $\varepsilon := 1/16$.

Dari beberapa contoh dan latihan ini mestinya dapat disimpulkan bahwa semakin kecil $\varepsilon > 0$ yang diberikan maka semakin besar indeks N yang dapat diambil. Kenyataan ini sesuai dengan definisi bahwa semakin kecil $\varepsilon > 0$ maka semakin kecil lebar "kerangkeng" dan semakin lama pula suku-suku barisan dapat mulai mengumpul di dalam "kerangkeng" ini.

Kekonvergenan barisan (x_n) ditentukan oleh pola suku-suku yang sudah jauh berada diujung. Walaupun pada awalnya suku-suku barisan berfluktuasi cukup besar namun bila pada akhirnya suku-suku ini mengumpul disekitar titik tertentu maka barisan ini tetap konvergen.

Definisi 2.1.3. Misalkan barisan $X := (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ dipotong pada suku ke m dan dibentuk barisan baru

$$X_m := (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots)$$

maka barisan X_m disebut ekor ke m barisan X.

Latihan 2.1.7. Buktikan bahwa X konvergen bila hanya bila X_m konvergen dan

$$\lim X = \lim X_m.$$

Pembuktikan limit barisan melalui definisi akan menjadi sulit bilamana bentuk barisan yang dihadapi cukup rumit. Melalui definisi dikembangkan "alat-alat" sederhana yang dapat digunakan untuk membuktikan limit barisan, khususnya barisan yang mempunyai bentuk tertentu.

Teorema 2.1.2 (Teorema Konvergen Terdominasi). *Misalkan ada dua barisan bilangan real* (a_n) *dan* (x_n). *Jika ada* $C > 0$ *dan* $m \in \mathbb{N}$ *sehingga berlaku*

$$|x_n - x| \leq C|a_n| \text{ untuk semua } n \geq m \text{ dan } \lim(a_n) = 0$$

maka $\lim(x_n) = x$.

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$ maka ada $N_a \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|a_n| < \varepsilon/C \text{ untuk setiap } n \geq N_a.$$

Jadi untuk setiap $n \geq N :=$ maks $\{N_a, m\}$ berlaku

$$|x_n - x| \leq C|a_n| < C(\varepsilon/C) = \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $\lim(x_n) = x$ □

Teorema ini biasa disebut teorema kekonvergenan terdominasi (TKD), karena kekonvergenan ini disebabkan karena terdominasi oleh barisan yang konvergen. Dalam penggunaan teorema ini harus dibangun barisan (a_n) yang konvergen ke 0 dan ditentukan konstanta positif C.

Contoh 2.1.4. Bila $a > 0$, buktikan barisan $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right) = 0$.

Bukti. Karena $a > 0$ maka berlaku $0 < na < na + 1$, dan akibatnya kita mempunyai

$$\frac{1}{na+1} < \frac{1}{na}.$$

Selanjutnya,

$$|\frac{1}{1+na} - 0| = \frac{1}{1+na} < \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dengan mengambil $C := 1/a$ dan $a_n = 1/n$ dan dikarenakan $\lim a_n = 0$ maka dengan teorema sebelumnya disimpulkan bahwa $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right) = 0$. □

Contoh 2.1.5. Misalkan $0 < b < 1$, buktikan $\lim(b^n) = 0$.

Bukti. Ambil $a := \frac{1-b}{b} = \frac{1}{b} - 1 > 0$. Dapat ditulis $b := \frac{1}{(1+a)}$ dan dengan ketidaksamaan Bernoulli berlaku

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

dan diperoleh

$$0 < \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

Latihan 2.1.8. Misalkan $c > 0$, buktikan $\lim(c^{1/n}) = 0$.

Latihan 2.1.9. Buktikan $\lim(n^{1/n}) = 1$.

2.2 Sifat-sifat Barisan Konvergen

Berikut ini diberikan sifat aljabar barisan konvergen. Sifat-sifat ini banyak digunakan dalam keperluan praktis terutama dalam menghitung nilai limit barisan. Sebelumnya diberikan sifat keterbatasan barisan konvergen.

Definisi 2.2.1. Barisan (x_n) dikatakan terbatas jika ada bilangan $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, barisan (x_n) terbatas jika hanya jika himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas pada $\mathbb{R}$.

Contoh 2.2.1. Barisan $(1/n : n \in \mathbb{N})$ terbatas dengan $M = 1$, $((-1)^n : n \in \mathbb{N})$ terbatas dengan $M = 1$, $(n^2 : n \in \mathbb{N})$ tidak terbatas.

Teorema 2.2.1. *Jika barisan (x_n) konvergen maka ia terbatas.*

Bukti. Diketahui barisan (x_n) konvergen, katakan $\lim(x_n) = x$. Ambil $\varepsilon := 1$ maka ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|x_n - x| < 1 \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Karena $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < 1$ maka berdasarkan sifat nilai mutlak diperoleh

$$|x_n| < 1 + |x| \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Bila

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, 1 + |x|\}$$

maka berlaku

$$|x_n| \leq M \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N},$$

yaitu (x_n) terbatas. □

Catatan 2.2.1. Barisan terbatas belum tentu konvergen. Barisan tidak terbatas pasti divergen.

Contoh 2.2.2. Diberikan barisan $((-1)^n : n \in \mathbb{N})$. Jelas barisan ini terbatas karena $|x_n| < 1$ untuk setiap n. Selanjutnya, kita buktikan barisan ini tidak konvergen. Andaikan ia konvergen, katakan $\lim(x_n) = a$. Ambil $\varepsilon := 1$, maka terdapat bilangan asli N sehingga

$$|(-1)^n - a| < 1 \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Bilangan $n \geq N$ dapat berupa bilangan genap atau bilangan ganjil. Untuk n ganjil maka $(-1)^n = -1$, sehingga diperoleh

$$|(-1)^n - a| = |-1 - a| < 1 \Rightarrow -2 < a < 0. \quad (*)$$

Untuk n genap maka $(-1)^n = 1$, sehingga diperoleh

$$|(-1)^n - a| = |1 - a| < 1 \Rightarrow 0 < a < 2. \quad (**)$$

Dua pernyataan (*) dan (**) saling kontradiksi, sehingga pengandaian salah. Jadi terbukti barisan $((-1)^n : n \in \mathbb{N})$ divergen.

Teorema 2.2.2. *Jika $X := (x_n)$ dan $Y := (y_n)$ dua barisan yang masing-masing konvergen ke x dan y maka*

(a). *barisan $X \pm Y := (x_n + y_n)$ konvergen ke $x \pm y$,*

(b). *barisan $XY := (x_n y_n)$ konvergen ke xy.*

(c). *barisan $cX := (cx_n)$ konvergen ke cx*

Bukti. (a) Untuk membuktikan $\lim(x_n + y_n) \to (x + y)$, kita harus memberikan estimasi pada $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Karena $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$ maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n \geq N_1 \text{ dan } |y_n - y| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n \geq N_2.$$

Jadi untuk setiap $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} (x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $(x_n - y_n)$ konvergen ke $(x - y)$.
(b). Karena (x_n) konvergen maka ia terbatas, yaitu ada $M_1 > 0$ sehingga $|x_n| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ambil $M := \max\{M_1, |y|\}$. Karena $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$ maka untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon/2M \text{ untuk setiap } n \geq N_1 \text{ dan } |y_n - y| < \varepsilon/2M \text{ untuk setiap } n \geq N_2.$$

Jadi untuk setiap $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \\ &= |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \\ &\leq |x_n||y - y_n| + |y||x - x_n| \\ &\leq M|x_n - x| + M|y_n - y| \\ &\leq M(\varepsilon/2M) + M(\varepsilon/2M) = \varepsilon. \end{aligned}$$

(c). Pernyataan ini dapat dibutkikan dengan cara membentuk

$$|cx_n - cx| = |c||x_n - x|.$$

Bukti lengkapnya dapat diselesaikan sendiri. □

Catatan 2.2.2. Pada sifat perkalian limit dua barisan dapat dikembangkan untuk perkalian sebanyak berhingga barisan, yaitu jika $(a_n), (b_n), \cdots, (z_n)$ barisan-barisan konvergen maka berlaku

$$\lim\left((a_n)(b_n)\cdots(z_n)\right) = \lim(a_n)\lim(b_n)\cdots\lim(z_n).$$

Khususnya jika barisan-barisannya sama, katakan ada sebanyak k barisan (x_n) maka

$$\lim(a_n^k) = \left(\lim(a_n)\right)^k.$$

Teorema 2.2.3. *Misalkan $X := (x_n)$ dan $Y := (y_n)$ barisan konvergen, berturut-turut ke x dan y, $y_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y \neq 0$ maka barisan hasil bagi $\frac{X}{Y} := \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ konvergen ke $\frac{x}{y}$.*

Bukti.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - x y_n}{y_n y}\right| \\
&= \frac{1}{|y_n||y|}|x_n y - x y_n| \\
&= \frac{1}{|y_n||y|}|x_n y - x_n y_n + x_n y_n - x y_n| \\
&= \frac{1}{|y_n||y|}|x_n(y - y_n) + y_n(x_n - x)| \\
&\leq \frac{|x_n|}{|y_n||y|}|y_n - y| + \frac{1}{|y|}|x_n - x|
\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita perlu memberikan batas untuk suku $\frac{|x_n|}{|y_n||y|}$. Karena (x_n) konvergen maka ada $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\lim(y_n) = y$ maka diberikan $\varepsilon := \frac{1}{2}|y|$ ada $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|y_n - y| < \frac{1}{2}|y| \text{ untuk setiap } n \geq N_1.$$

Karena $||y_n| - |y|| \leq |y_n - y|$ dan $|y_n - y| < \frac{1}{2}|y|$ maka

$$||y_n| - |y|| < \frac{1}{2}|y| \Leftrightarrow \frac{1}{2}|y| < |y_n| < \frac{3}{2}|y| \Rightarrow |y_n| > \frac{1}{2}|y| \text{ untuk setiap } n \geq N_1.$$

Jadi berlaku

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|} \text{ untuk setiap } n \geq N_1.$$

Dengan demikian kita mempunyai estimasi

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{|x_n|}{|y_n||y|}|y_n - y| + \frac{1}{|y|}|x_n - x| < \frac{2M}{|y|^2}|y_n - y| + \frac{1}{|y|}|x_n - x|. \quad (*)$$

Sekarang diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\lim(y_n) = y$ dan $\lim(x_n) = x$ maka ada $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|x_n - x| < \frac{|y|}{2}\varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_2, \text{ dan } |y_n - y| < \frac{|y|^2}{4M}\varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_3.$$

Dengan mengambil $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$ maka berdasarkan (*), diperoleh

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

$\square$

Contoh 2.2.3. Kita tunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = 2$. Pertama kita ubah dulu ke dalam bentuk barisan konvergen, yaitu

$$\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = \frac{2+1/n}{1+5/n}.$$

Selanjutnya, diambil $X := (2+1/n)$ dan $Y := (1+5/n)$. Jelas bahwa $\lim X = 2$ dan $\lim Y = 1$ maka $\lim \frac{X}{Y} = \frac{2}{1} = 2$.

Teorema 2.2.4. *Bila (x_n) barisan taknegatif, yaitu $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\lim(x_n) \geq 0$.*

Bukti. Andaikan kesimpulan ini salah, yaitu $x := \lim(x_n) < 0$. Ambil $\varepsilon := -x > 0$, maka ada $K \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|x_n - x| < -x \iff x < x_n - x < -x \Longrightarrow x_n < 0, \text{ untuk semua } n \geq K.$$

Khususnya untuk $n = K$ berlaku $x_n < 0$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 2.2.5. *Jika (x_n) dan (y_n) barisan konvergen dan $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.*

Bukti. Didefinisikan barisan (z_n) dengan $z_n := y_n - x_n$. Diperoleh (z_n) barisan taknegatif, dan selanjutnya digunakan Teorema sebelumnya. □

Teorema 2.2.6. *Bila (x_n) barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $a \leq \lim(x_n) \leq b$.*

Bukti. Bandingkan barisan (x_n) dengan barisan konstan (a) dan barisan (x_n) dengan barisan konstan (b), kemudian gunakan Teorema sebelumnya. □

Teorema berikut menjelaskan kekonvergenan suaru barisan yang terjepit oleh dua barisan yang konveregen ke limit yang sama. Teorema ini sangat bermanfaat dalam membuktikan limit barisan.

Teorema 2.2.7 (Teorema Konvergen Terjepit). *Bila (x_n), (y_n) dan (z_n) barisan bilangan real yang memenuhi kondisi berikut*

(i) $x_n \leq y_n \leq z_n$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim(x_n) = \lim(z_n)$

maka (y_n) konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$.

Bukti. Misalkan $w := \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat bilangan asli N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_1 \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N_2.$$

Bila diambil $N := \max\{N_1, N_2\}$ maka berlaku

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Dari ini diperoleh

$$-\varepsilon < x_n - w \text{ dan } z_n - w < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Diketahui $x_n \leq y_n \leq z_n$, dengan menambahkan w pada ketiga ruas diperoleh

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Dengan hasil sebelumnya, diperoleh

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \Longleftrightarrow |y_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Jadi terbukti $\lim(y_n) = w$. □

Teorema ini dikenal dengan Teorema *squeeze*, atau Teorema kekonvergenan terjepit (TKJ).

Contoh 2.2.4. Buktikan $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$.

Bukti. Diperhatikan untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Karena itu diperoleh

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Dengan mengambil $x_n = -1/n$, $y_n = \left(\frac{\sin n}{n}\right)$ dan $z_n = 1/n$ maka dengan TKJ diperoleh $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = \lim(-1/n) = \lim(1/n) = 0$. □

Penggunaan selanjutnya TKJ ini akan banyak muncul pada pembahasan limit fungsi secara umum yang akan diberikan pada bab selanjutnya.

Satu lagi alat cepat dan mudah untuk menyelidiki kekonvergenan barisan adalah uji rasio berikut.

Teorema 2.2.8. *Misalkan (x_n) barisan bilangan real positif sehingga $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} := L$ ada. Jika $L < 1$ maka (x_n) konvergen dan* $\lim(x_n) = 0$.

Bukti. Karena (x_n) positif maka $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ barisan taknegatif sehingga $L \geq 0$. Jadi $0 \leq L < 1$. Misalkan r suatu bilangan dimana $L < r < 1$, ambil $\varepsilon := r - L > 0$. Terdapat bilangan asli K sehingga

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \varepsilon := r - L \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Jadi untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < r \Rightarrow x_{n+1} < rx_n,$$

dan karena $0 < r < 1$ maka diperoleh

$$0 < x_{n+1} < rx_n < r^2 x_n < \cdots < r^{n-K+1} x_K.$$

Dengan mengambil $C := \frac{x_K}{r^K}$ kita mempunyai

$$0 < x_{n+1} < Cr^{n+1}.$$

Karena $0 < r < 1$ maka $\lim(r^{n+1}) = 0$ dan dengan menggunakan Teorema kekonvergenan terdominasi maka terbukti

$$\lim(x_n) = \lim(x_{n+1}) = 0.$$

□

Contoh 2.2.5. Kita selidiki apakah barisan $(\frac{n^2}{2^n})$ konvergen. Kita gunakan uji rasio, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

Jadi $L := \lim \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1/2 < 1$, dan disimpulkan barisan $(\frac{n^2}{2^n})$ konvergen dengan limit nol.

Latihan 2.2.1. Misalkan $b > 1$, selidikilah kekonvergenan barisan $(\frac{n}{b^n})$.

Pada bagian akhir sub pokok bahasan ini diberikan dua hasil yang berguna untuk mempelajari materi yang akan datang.

Teorema 2.2.9. *Jika barisan (x_n) yang konvergen maka*

(i) *Barisan nilai mutlak $(|x_n|)$ konvergen dengan* $\lim |x_n| = |\lim(x_n)|$.

(ii) *Jika $x_n \geq 0$ maka barisan $(\sqrt{x_n})$ konvergen dengan* $\lim(\sqrt{x_n}) = \left(\sqrt{\lim(x_n)}\right)$.

Bukti. (i) Misalkan $\lim(x_n) = x$. Kita telah mempunyai sifat nilai mutlak bahwa

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|, \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Jadi kekonvergenan $(|x_n|)$ langsung diakibatkan oleh kekonvergenan (x_n).

(ii) Karena $x > 0$ maka $\sqrt{x} > 0$. Selanjutnya dibentuk

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}. \qquad (*)$$

Karena $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$ maka $\frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ sehingga dari (*) diperoleh

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) |x_n - x|.$$

Karena $x_n \to x$ maka $(x_n - x) \to 0$, dan dengan menggunakan Teorema kekonvergenan terdominasi maka terbukti $\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{x} = \left(\sqrt{\lim(x_n)}\right)$. □

2.3 Barisan Monoton Terbatas (BMT)

Sebelumnya sudah dibahas bahwa barisan konvergen pasti terbatas, tetapi barisan terbatas belum tentu konvergen. Pada bagian ini dibahas syarat cukup agar barisan terbatas konvergen.

Definisi 2.3.1. Suatu barisan (x_n) dikatakan monoton jika ia naik saja atau turun saja. Dikatakan **naik** jika

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots, \text{ atau } x_n \leq x_{n+1} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

dan dikatakan **turun** jika

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots, \text{ atau } x_n \geq x_{n+1} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Contoh 2.3.1. Barisan $(1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots)$, $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \cdots)$ merupakan barisan yang naik. Barisan $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots)$, merupakan barisan yang turun. Barisan $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots)$ turun jika $a < 0$, dan naik jika $a > 0$. Barisan $(-1, +1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots)$ merupakan barisan tidak monoton. Barisan konstan $(2, 2, \cdots, 2, \cdots)$ merupakan barisan naik dan juga turun. Barisan $(7, 6, 2, 1, 2, 3, 4, \cdots)$ dan $(-2, 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$ merupakan barisan tidak monoton tapi pada akhirnya monoton.

Teorema 2.3.1 (Teorema Konvergen Monoton). *Jika barisan (x_n) monoton dan terbatas maka ia konvergen. Selanjutnya,*

(i) *Bila (x_n) naik maka* $\lim(x_n) = \sup\{x_n\, n \in \mathbb{N}\}$

(ii) *Bila (x_n) turun maka* $\lim(x_n) = \inf\{x_n\, n \in \mathbb{N}\}$.

Bukti. (i) Diketahui (x_n) naik dan terbatas. Ada $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M \Rightarrow x_n \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas diatas. Berdasarkan sifat supremum, himpunan ini selalu mempunyai supremum, katakan

$$x^* := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $\lim(x_n) = x^*$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $x^* - \varepsilon$ bukan lagi batas atas $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Jadi ada $x_K \in \{x_n\}$ sehingga

$$x^* - \varepsilon < x_K.$$

Karena (x_n) naik dan $x_n < x^*$ untuk setiap n maka diperoleh

$$x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n < x^* < x^* + \varepsilon \text{ untuk setiap} n \geq K.$$

Ini berakibat $x^* - \varepsilon < x_n < x^* + \varepsilon$ atau $|x_n - x^*| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq K$, yaitu terbukti $\lim(x_n) = x^*$.
Bukti untuk bagian (ii) lihat latihan berikut. □

Latihan 2.3.1. Lengkapi bukti bagian (ii) Teorema TKM di atas.

Contoh 2.3.2. Selidikilah apakah barisan (x_n) yang didefinsikan oleh

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

konvergen atau divergen.

Bukti. Jelas barisan ini monoton naik sebab

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n} \geq x_n \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Selanjutnya dibuktikan apakah barisan ini terbatas atau tidak.
Untuk melihat pola barisan ini secara numerik , kita perhatikan suku ke n

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Komputasi numerik memberikan data sebagai berikut :

$$x_{10} = 2.9290,\ x_{100} = 5.1874,\ x_{1000} = 7.4855,\ x_{10000} = 9.7876,\ x_{100000} = 12.0901.$$

Terlihat bahwa kenaikannya sangat lambat sehingga berdasarkan data ini 'seolah-olah' suku-suku barisan ini akan menuju bilangan tertentu atau konvergen. Untuk suatu n diambil suku ke 2^n, yaitu x_{2^n}. Untuk $n = 1$, $x_{2^1} = 1 + \frac{1}{2}$. Untuk $n = 2$, $x_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$. Untuk $n = 3$, $x_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$.
Secara umum diperoleh

$$\begin{aligned}
x_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{nsuku} \\
&= 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Jadi selalu ada suku pada barisan ini yang lebih besar dari bilangan real manapun sehingga barisan ini tidak terbatas dan disimpulkan barisan ini divergen. Sebagai ilustrasi diberikan bilangan real $\alpha = 5001$. Maka kita dapat menemukan suku yang lebih besar dari 5001, yaitu suku ke $2^{10.000}$. Silahkan dicek! □

Kekonvergenan barisan yang disajikan dalam bentuk rekursif lebih mudah diperiksa dengan menggunakan TKM.

Contoh 2.3.3. Misalkan (x_n) barisan yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

$$\begin{cases} x_1 := 1, \\ x_{n+1} := \sqrt{2x_n} \quad \text{untuk } n \geq 1. \end{cases}$$

Selidikilah kekonvergenan barisan ini. Bila ia konvergen berapakah limitnya.

Penyelesaian. Diperhatikan $x_1 = 1$ dan $x_2 = \sqrt{2}$. Jadi $1 \leq x_1 < x_2 < 2$. Secara intuitif, barisan ini monoton naik dan terbatas diatas oleh 2. Untuk menunjukkan klaim ini kita gunakan prinsip induksi matematika, yaitu menunjukkan bahwa berlaku

$$1 \leq x_n < x_{n+1} < 2.$$

Kita baru saja membuktikan pernyataan ini berlaku untuk $n = 1$. Diasumsikan berlaku untuk $n = k$, yaitu kita mempunyai $1 \leq x_k < x_{k+1} < 2$. Akibatnya, $2 \leq 2x_k < 2x_{k+1} < 4$. Untuk $n = k + 1$, diperoleh

$$1 < \sqrt{2} \leq x_{k+1} = \sqrt{2x_k} < \sqrt{2x_{k+1}} := x_{k+2} < \sqrt{4} = 2.$$

Jadi berlaku

$$1 \leq x_{k+1} < x_{k+2} < 2, \text{ yaitu berlaku untuk } n = k + 1.$$

Dengan demikian terbukti bahwa barisan ini monoton naik dan terbatas. Berdasarkan TKM barisan ini konvergen. Selanjutnya dihitung limitnya. Bila supremum himpunan $\{x_n\}$ mudah dicari maka limitnya langsung didapat, yaitu $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$. Berdasarkan hasil perhitungan numeris 10 suku pertama barisan ini adalah

```
1.0000, 1.4142, 1.6818, 1.8340, 1.9152, 1.9571, 1.9785, 1.9892,
1.9946, 1.9973.
```

Terlihat supremumnya adalah 2. Secara teoritis masih harus dibuktikan bahwa 2 benar-benar sebagai supremumnya. Cara kedua adalah dengan menggunakan sifat ekor barisan dan barisan akar. Misalkan $x = \lim(x_n)$, maka

$$\begin{aligned} \lim(x_{n+1}) &= \lim(\sqrt{2x_n}) = \sqrt{\lim(2x_n)} \\ x &= \sqrt{2x} \\ x^2 &= 2x \Rightarrow x(x-2) = 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $x = 0$ atau $x = 2$. Karena $x_n > 1$ maka nilai yang memenuhi adalah $x = 2$. Cara ketiga adalah dengan mengamati bahwa untuk limit ini menghasilkan bentuk akar kontinu berikut,

$$\lim(x_n) = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}.$$

Misalkan $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$ maka diperoleh

$$x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2.$$

Ini memberikan hasil yang sama yaitu $\lim(x_n) = 2$. □

Latihan 2.3.2. Diberikan barisan (z_n) yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

$$\begin{cases} z_1 := 1, \\ z_{n+1} := \frac{1}{4}(2z_n + 3) \quad \text{untuk } n \geq 1. \end{cases}$$

Selidikilah kekonvergenan barisan ini. Jika ia konvergen, hitunglah limitnya.

Latihan 2.3.3. Misalkan $a > 0$ dan $z_1 > 0$. Didefinisikan $z_{n+1} := (a + z_n)^{1/2}$. Selidikilah kekonvergenan barisan ini. Jika ia konvergen, hitunglah limitnya.

Latihan 2.3.4. Buktikan dengan menggunakan TKM, jika $0 < b < 1$ maka $\lim(b^n) = 0$.

Latihan 2.3.5. Dengan menggunakan TKM untuk buktikan $\lim(c^{1/n}) = 1$ dimana $c > 0$.

2.4 Barisan Bagian

Pada bagian awal Bab ini telah diperkenalkan istilah ekor barisan. Ekor barisan ini merupakan bentuk khusus dari barisan bagian. Berikut ini diberikan definisi barisan bagian.

Definisi 2.4.1. Misalkan $X := (x_n)$ barisan bilangan real dan misalkan diambil barisan bilangan asli naik tegas, yaitu $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ maka barisan X' yang diberikan oleh

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \cdots, x_{r_n}, \cdots)$$

disebut **barisan bagian** dari X. Barisan bagian ini ditulis $X' := (x_{r_n} : n \in \mathbb{N})$.

Contoh 2.4.1. Diberikan barisan $X := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots)$. Beberapa barisan bagian dari X adalah

(a) $X' := (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots)$.,

(b) $X'' := (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots)$.

(c) $X''' := (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n+3}, \cdots)$.

Sedangkan berikut ini bukan merupakan barisan bagian X :

(a) $Y' := (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots)$

(b) $Y'' := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots)$.

Gambar 2.2: Konstruksi barisan bagian

Konstruksi barisan bagian ini diilustrasikan pada Gambar 2.2. Berdasarkan konstruksi ini terlihat jelas bahwa $r_n \geq n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kekonvergenan barisan bagian mengikuti kekonvergenan barisan induknya. Berikut ini Teorema kekonvergenan barisan bagian (TKBB).

Teorema 2.4.1 (Teorema Konvergen Barisan Bagian). *Jika barisan* (x_n) *konvergen ke* x *maka setiap barisan bagiannya konvergen ke* x*.*

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (x_n) konvergen ke x maka ada bilangan asli K sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Karena $r_n \geq n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka berlaku pula

$$|x_{r_n} - x| < \varepsilon \text{ untuk setiap } r_n \geq n \geq K.$$

□

Contoh 2.4.2. Kita buktikan dengan menggunakan TKBB bahwa $\lim(c^{1/n}) = 1$ dimana $c > 0$. Misalkan $z_n = c^{1/n}$, diambil $z_{2n} = c^{1/2n} = (c^{1/n})^2 = z_n^2$ sebagai barisan bagiannya. Ditulis $z = \lim(z_n)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim(z_n) &= \lim(z_{2n}) \\ \lim(z_n) &= \lim((z_n)^2) = (\lim(z_n))^2 \\ z &= z^2 \Rightarrow z(z-1) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ atau } z = 1. \end{aligned}$$

Karena $z_n > 0$ untuk setiap n dan (z_n) monoton naik (seharusnya sudah dibuktikan pada latihan sebelumnya) maka dimabil $z = 1$.

Melalui TKBB kita dapat membuat kriteria barisan divergen. Diperhatikan kontraposisinya, jika ada dua barisan bagian konvergen tetapi limit keduanya tidak sama maka barisan induknya divergen.

Contoh 2.4.3. Diperhatikan barisan $X := ((-1)^n)$ mempunyai dua barisan bagian $X' := (x_{2n}) = ((-1)^{2n})$ dan $X'' := (x_{2n-1}) = ((-1)^{2n-1})$. Karena

$$\lim X' = 1 \neq -1 = \lim X''$$

maka barisan $((-1)^n)$ divergen, hasil yang sama seperti sebelumnya.

Tidak semua barisan monoton, tetapi pada setiap barisan selalu dapat dikonstruksi barisan bagian yang monoton. Bila barisan induknya terbatas maka jelas setiap barisan bagian juga terbatas. Kosekuensi dari kenyataan ini diperoleh Torema terkenal berikut.

Teorema 2.4.2 (Teorema Bolzano-Wierestraß). *Setiap barisan terbatas selalu memuat barisan bagian yang konvergen.*

Sebagai ilustrasi yang menjelaskan Teorema B-W ini diperhatikan barisan $((-1)^n)$ merupakan barisan terbatas tetapi tidak konvergen. Dua barisan bagiannya yaitu $(x_{2n}) = ((-1)^{2n})$ dan $(x_{2n-1}) = ((-1)^{2n-1})$ konvergen, berturut-turut ke 1 dan -1.

2.5 Barisan Cauchy dan Kontraksi

Teorema konvergen monoton (TKM) yang sudah dibahas sebelumnya sangat berguna untuk menyelidiki kekonvergenan suatu barisan, namun ia memiliki keterbatasan karena hanya dapat diterapkan pada barisan yang monoton. Untuk barisan yang tidak monoton TKM tidak berguna sama sekali. Untuk itu pada bagian akhir Bab ini diberikan dua kriteria konvergenan tanpa syarat monoton.

Definisi 2.5.1 (Barisan Cauchy). Barisan $X := (x_n)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K, biasanya bergantung pada ε sehingga

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ untuk setiap } m, m \geq K.$$

Lemma 2.5.1. *Barisan Cauchy selalu terbatas.*

Bukti. Misalkan $X := (x_n)$ barisan Cauchy, dan diberikan $\varepsilon := 1$. Terdapatlah bilangan asli K sehingga

$$|x_n - x_m| < 1 \text{ untuk setiap } m, n \geq K.$$

Khususnya, untuk $m = K$ maka berlaku

$$|x_n - x_K| < 1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_K| \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Ambil $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{K-1}|, 1 + |x_K|\}$ maka diperoleh $|x_n| < M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yaitu (x_n) terbatas. $\square$

Kriteria Cauchy untuk barisan diungkapkan pada Teorema berikut.

Teorema 2.5.1. *Suatu barisan bilangan real adalah konvergen bila hanya bila ia barisan Cauchy.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui (x_n) konvergen, katakan $\lim(x_n) = x$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada bilangan asli K sehingga $|x_n - x| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K$. Jadi untuk setiap $m, n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x - x_n| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti (x_n) barisan Cauchy.
($\Leftarrow$) Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (x_n) Cauchy maka ada bilangan asli K_1 sehingga

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } m, n \geq K_1.$$

Berdasarkan Lemma 2.5.1, barisan Cauchy (x_n) ini terbatas dan berdasarkan Teorema Bolzano-Wierestraß terdapat barisan bagian (x_{r_n}) yang konvergen, katakan $\lim(x_{r_n}) = x^*$. Oleh karena itu terdapat bilangan asli K_2 sehingga

$$|x_{r_n} - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } r_n \geq K_2.$$

Bila diambil $K := \max\{K_1, K_2\}$ maka keduanya berlaku

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_{r_n} - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n, m, r_n \geq K.$$

Khususnya untuk $m = K = r_n$ berlaku

$$|x_n - x_K| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_K - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Akhirnya diperoleh untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K + x_K - x^*| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

yaitu (x_n) konvergen ke x. □

Contoh 2.5.1. Kita tunjukkan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan Cauchy. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Selalu ada bilangan asli K sehingga $K > \frac{2}{\varepsilon}$. Jadi untuk setiap $m, n \geq M$ berlaku $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Jadi

$$|x_m - x_n| = |1/m - 1/n| \leq 1/m + 1/n < 2/\varepsilon + 2/\varepsilon = \varepsilon, \text{ untuk setiap } m, m \geq K.$$

Latihan 2.5.1. Buktikan barisan $(\frac{n+1}{n})$ adalah Cauchy, tetapi barisan $(n + \frac{(-1)^n}{n})$ bukan Cauchy.

Contoh 2.5.2. Selidikilah kekonvergenan barisan (x_n) yang didefinisikan secara rekursif berikut :

$$\begin{cases} x_1 := 1, x_2 := 2 \\ x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) & \text{untuk } n \geq 2. \end{cases}$$

Penyelesaian. Dapat ditunjukkan dengan induksi bahwa $1 \leq x_n \leq 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Apakah barisan ini monoton ?. Coba perhatikan beberapa suku pertamanya berikut ini,

```
1.0000, 2.0000, 1.5000, 1.7500, 1.6250, 1.6875, 1.6563, 1.6719,
1.6641, 1.6680
```

Tidak ada indikasi barisan ini monoton sehingga TKM tidak dapat digunakan.

Diperhatikan secara rekursif didapat

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| &= |x_n + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)| \\ &= \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \\ &= \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_n| \\ &= \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \frac{1}{2^2}|x_{n-2} - x_{n-1}| \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Misalkan $m > n$, diperhatikan suku-suku ke $n, n+1, n+2, \cdots, m-1, m$. Dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(2 - (1/2)^{m-n-1}\right) < \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

Diambil K bilangan asli terkecil yang lebih besar dari $(2 - {}^2\log \varepsilon)$, maka

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ untuk setiap } m, m \geq K.$$

Terbukti barisan ini konvergen. Selanjutnya, limit barisan tidak dapat diperoleh dengan menggunakan sifat ekor barisan karena akan menghasilkan relasi $x = \frac{1}{2}(x + x)$. Relasi ini selalu benar tetapi tidak memberikan informasi apapun.

Sekarang digunakan TKBB. Ambil suku-suku ganjil $(x_{2n+1} : n \in \mathbb{N})$. Untuk $n = 1$ diperoleh $x_3 = 1 + \frac{1}{2}$. Karena $x_4 = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$, maka untuk $n = 2$ diperoleh $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$. Karena $x_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$, maka untuk $n = 3$ diperoleh $x_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}$. Secara umum, dengan menggunakan induksi matematika dapat dibuktikan bahwa setiap bilangan asli n berlaku

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}}_{deret\ geometri\ nsuku} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - (\frac{1}{4})^n\right)}{3/4} \\ &= 1 + \frac{2}{3}\left(1 - (1/4^n)\right). \end{aligned}$$

Berdasarkan ini diperoleh

$$\lim(x_n) = \lim(x_{2n+1}) = \lim\left(1 + \frac{2}{3}(1 - (1/4^n))\right) = 1 + 2/3 = 5/3.$$

□

Latihan 2.5.2. Misalkan y_1 dan y_2 bilangan real sebarang dengan $y_1 < y_2$. Didefinisikan $y_n := \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}$ untuk $n \geq 2$. Selidikilah kekonvergenan barisan (y_n), dan bila ia konvergen hitunglah limitnya.

Satu lagi kriteria kekonvergenan barisan bilangan real yang diberikan pada penghujung Bab ini yaitu barisan kontraksi.

Definisi 2.5.2. Barisan bilangan real $X := (x_n)$ dikatakan **kontraksi** jika ada bilangan real C dengan $0 < C < 1$ sehingga

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < C|x_{n+1} - x_n|$$

untuk setiap bilangan asli n. Kita sebut saja bilangan C sebagai kontraktornya.

Sifat kontraksi ini dapat dipahami sebagai berikut. Misalkan didefinisikan $d_n := |x_{n+1} - x_n|$ yaitu magnitud atau jarak dari dua suku yang berdekatan. Bila barisan magnitud ini (d_n) turun secara tegas maka barisan (x_n) bersifat kontraksi. Ini berarti jarak antara dua suku berdekatan semakin lama semakin kecil.

Teorema 2.5.2. *Bila (x_n) barisan kontraksi maka ia konveregen.*

Bukti. Cukup dibuktikan barisan kontraksi (x_n) merupakan barisan Cauchy. Pertama diperhatikan pola magnitud selisih yang didominasi oleh $|x_2 - x_1|$

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq C|x_{n+1} - x_n| \\ &\leq CC|x_n - x_{n-1}| = C^2|x_n - x_{n-1}| \\ &= C^2C|x_{n-1} - x_{n-2}| = C^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\vdots \\ &\leq C^n|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Sekarang kita melakukan estimasi untuk selisih $|x_m - x_n|$, diasumsikan saja $m > n$. Seperti idea ketika menyelesaikan soal pada Contoh 2.5.2, diperoleh

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \\
&\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\
&= |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \cdots + |x_m - x_{m-1}| \\
&\leq \underbrace{\left(C^{n-1} + C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{m-2}\right)}_{(m-n)\ suku\ deret\ geometri} |x_2 - x_1| \\
&= C^{n-1}\left(\frac{1 - C^{m-n}}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \\
&\leq C^{n-1}\left(\frac{1}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \to 0
\end{aligned}$$

sebab $0 < C < 1$. Jadi disimpulkan bahwa (x_n) barisan Cauchy, dan akibatnya ia konvergen. □

Contoh 2.5.3. Kita tunjukkan bahwa barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{n}$ merupakan barisan kontraksi. Diperhatikan

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{n+12} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{(n+2)(n+1)}\right| = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

dan

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Karena $\frac{1}{(n+2)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)}$ maka terbukti $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|$, yaitu (x_n) kontraksi.

Contoh 2.5.4. Misalkan x_1 suatu bilangan real dengan $0 < x_1 < 1$. Didefinisikan

$$x_{n+1} := \frac{1}{7}(x_n^3 + 2),\ n \geq 1.$$

Selidikilah apakah barisan ini konvergen.

Bukti. Karena $0 < x_1 < 1$ maka $x_n = \frac{1}{7}(x_{n-1}^3 + 2) < 3/7 < 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{7}(x_{n+1}^3 + 2) - \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)\right| \\
&= \frac{1}{7}\left|x_{n+1}^3 - x_n^3\right| = \frac{1}{7}|(x_{n+1}^2 + x_{x+1}x_n + x_n^2)(x_{n+1} - x_n)| \\
&\leq \frac{3}{7}|x_{n+1} - x_n|.
\end{aligned}$$

Karena $C = \frac{3}{7} < 1$ maka disimpulkan ia merupakan barisan kontraksi, jadi konvergen. Karena konvergen, pertanyaan selanjutnya adalah berapa limitnya? Misalkan $x := \lim(x_n)$ maka diperoleh

$$x^3 - 7x + 2 = 0,$$

yaitu limit barisan ini merupakan salah satu akar polinomial $x^3 - 7x + 2 = 0$. Beberapa suku pertamanya adalah

`0.5, 0.303571, 0.289711, 0.289188, 0.289169, 0.289169.`

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\lim(x_n) \approx 0.289169$. □

Latihan 2.5.3. Jika $x_1 < x_2$ dan $x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ untuk $n \geq 3$, buktikan (x_n) konvergen. Berapakah limitnya.

SOAL-SOAL LATIHAN BAB 2

1. Buktikan dengan menggunakan definisi limit barisan

   a. $\lim\left(\frac{n^2-1}{2n^2+3}\right) = \frac{1}{2}$

   b. $\lim\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = 0$

2. Buktikan bahwa $\lim(x_n) = 0$ bila hanya bila $\lim(|x_n|) = 0$. Periksalah pernyataan ini untuk $x_n = (-1)^n$.

3. Jika $\lim(x_n) = x$ dan $x > 0$, tunjukkan bahwa ada bilangan asli M sehingga $x_n > 0$ untuk setiap $n \geq M$.

4. Buktikan bahwa $\lim\left((2n)^{1/n}\right) = 1$.

5. Buktikan bahwa $\lim\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 0$.

6. Misalkan X dan Y suatu barisan. Jika X dan $X + Y$ konvergen, buktikan Y juga konveregen.

7. Buktikan barisan $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ konvergen.

8. Buktikan barisan $\left((-1)^n n\right)$ divergen.

9. Hitunglah nilai limit berikut dan nyatakan secara eksplisit Teorema yang digunakan pada setiap langkahnya.

   a. $\lim\left((2 + 1/n)^2\right)$.

   b. $\lim\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$.

10. Buktikan $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$.

11. Misalkan $x_1 := a > 0$ dan $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \geq 2$. Buktikan bahwa (x_n) konvergen dan hitunglah limitnya.

12. Misalkan $x_1 := a > 0$ dan $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ untuk $n \geq 2$. Selidikilah kekonvergenan (x_n). Bila ia konvergen, berapa limitnya.

13. Selidikilah kekonvergenan barisan (y_n) yang didefinisikan oleh
$$y_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

14. Sebelum tahun 1500 SM, orang Mesopotamia menghitung akar suatu bilangan positif menggunakan iterasi berikut : Misalkan $a > 0$, didefinisikan
$$\begin{cases} s_1 := 1, \\ s_{n+1} := \frac{1}{2}(s_n + a/s_n) & \text{untuk } n \geq 1. \end{cases}$$
Buktikan (s_n) konvergen ke $\sqrt{a}$. Gunakan hasil ini untuk aproksimasi $\sqrt{2}$.

15. Misalkan $x_n := \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Buktikan barisan (x_n) monoton naik dan terbatas.

16. Diberikan barisan $X := (x_n)$ dan $Y := (y_n)$. Dibentuk barisan $Z := (z_n)$ dengan cara
$$z_{2n-1} := x_n, \text{ dan } z_{2n} := y_n, \text{ untuk } n \geq 1.$$
Buktikan Z konvergen bila hanya bila X dan Y konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n)$.

17. Buktikan jika (x_n) dan (y_n) barisan Cauchy maka barisan $(x_n + y_n)$ dan $(x_n y_n)$ juga konvergen.

18. Jika $0 < r < 1$ dan $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, buktikan (x_n) barisan Cauchy.

19. Bila (x_n) barisan kontraksi dengan konstanta C dan $\lim(x_n) = x$, buktikan
    a. $|x_n - x| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$.
    b. $|x - x_n| \leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$.

20. Diketahui suku banyak $x^3 - 5x + 1 = 0$ mempunyai salah satu akar r dengan $0 < r < 1$. Buatlah barisan iterasi yang merupakan barisan kontraksi, kemudian aproksimasilah akar r ini dengan ketelitian 0.0001.