FONDASI MATEMATIKA

(Dasar berpikir deduktif dalam matematika)

Julan HERNADI

December 18, 2011

BUKU TEKS WAJIB

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

1 PROPOSISI DAN KONEKTIVITAS

1.1 Proposisi dan nilai kebenaran

Kalimat deklaratif adalah kalimat yang menyatakan suatu fakta. Kalimat deklaratif biasanya disebut juga pernyataan. Di dalam Bahasa Indonesia, biasanya ia memiliki pola dasar Subjek - Predikat - Objek (SPO).

Definisi 1.1. [Proposisi] Proposisi adalah kalimat deklaratif yang kebenarannya sudah dapat dipastikan, yaitu benar atau salah, tetapi tidak keduanya sekaligus.

Contoh 1.1. Kalimat berikut ini adalah proposisi.

1. Ponorogo adalah ibu kota propinsi Jawa Timur.
2. Ada 7 hari dalam seminggu.
3. $1 + 2 = 3$.
4. $2^3 = 6$.

Pernyataan 1 dan 4 bernilai salah dan pernyataan 2 dan 3 bernilai benar.

Contoh 1.2. Kalimat berikut adalah **bukan** proposisi.

1. Jam berapa sekarang ?
2. Biarkan aku pergi.
3. $x + 2 = 3$.
4. $x + y = 2$.

Kalimat 1 bukan proposisi karena ia bukan pernyataan tetapi **pertanyaan**. Kalimat 2 bukan proposisi karena ia bukan pernyataan tetapi **permintaan**. Kalimat 3 adalah pernyataan tetapi kebenarannya tidak pasti. Bila x diganti 1 maka ia menjadi benar, tetapi bila x selain 1 maka ia menjadi salah. Jadi kalimat ini bukan proposisi. Kalimat 4 bukan proposisi karena nilai kebenarannya tidak pasti. Ketiga contoh berikut in merupakan variasi kritis dari pernyataan disadur dari Koshy (2004) dalam [2].

Contoh 1.3. [Opini] Selidiki apakah kalimat berikut merupakan proposisi

- ▶ John F. Kennedy adalah President Amerika yang paling hebat.

Penyelesaian. Kalimat ini tidak mempunyai nilai kebenaran yang pasti. Sebagian orang mungkin menganggap Kennedy adalah Presiden Amerika yang paling hebat, sebagian orang lagi mungkin menganggap Presiden Rosevelt yang paling hebat, atau malah sebagian orang lainnya menganggap Obama yang paling hebat. Jadi kalimat ini proposisi tetapi **opini**. ■

Contoh 1.4. [Paradoks] Selidikilah apakah kalimat berikut adalah proposisi

- ▶ Kalimat ini adalah salah.

Penyelesaian Untuk mengetahui kalimat ini proposisi atau bukan, kita misalkan κ simbol untuk kalimat yang dirujuk oleh pernyataan ini. Misalkan kalimat κ benar, maka pernyataan 2 memberikan pertentangan atau kontradiksi karena ia menyatakan bahwa κ salah. Sedangkan bila kalimat κ salah, maka pernyataan 2 menyimpulkan bahwa κ benar. Padahal sesungguhnya κ salah, jadi kontradiksi. Berdasarkan penjelasan ini, kalimat 2 disimpulkan bukan proposisi. Kasus seperti ini dalam logika disebut dengan suatu **paradoks**. ■

Contoh 1.5. [Konjektur] Selidiki apakah kalimat berikut adalah proposisi

- ▶ Persamaan $x^n + y^n = z^n$ tidak mempunyai solusi bulat untuk semua $n \geq 3$.

Penyelesaian. Untuk kalimat ini belum dapat disimpulkan kebenaran atau kesalahannya. Untuk $n = 2$, kita dengan mudah menemukan bilangan bulat x, y

dan z sebagai solusi yaitu tripel Pythagoras, misalnya $x = 3, y = 4, z = 5$. Tetapi untuk $n = 3, 4, 5, \cdots$, belum satupun orang dapat memastikan ada atau tidaknya solusi persaman ini. Bila suatu saat dapat ditemukan solusi bulat untuk suatu $n \geq 3$, misalnya ditemukan x, y dan z bulat yang memenuhi $x^{113} + y^{113} = z^{113}$ maka kalimat ini dipastikan bernilai salah, jadi ia adalah proposisi. Sebaliknya jika ada orang yang dapat membuktikan dengan sahih bahwa tidak akan ditemukan bilangan bulat x, y dan z yang memenuhi $x^n + y^n = z^n$ untuk setiap $n \geq 3$ maka pernyataan ini bernilai benar, jadi ia adalah proposisi. Selama belum ada kepastian maka ia bukan proposisi. Untuk kalimat seperti ini disebut **konjektur** atau dugaan. Kalimat pada contoh ini terkenal dengan sebutan konjektur Pierre-Simon de Fermat yang dipublikasikan sekitar tahun 1637. Tetapi kemudian pada tahun 1993 (setelah 356 tahun), pernyataan ini dapat dibuktikan kebenarannya oleh Andrew J Wiles dari Princenton University. Jadi, sejak itu kalimat ini sudah merupakan proposisi. ■

Definisi 1.2. [Nilai kebenaran] Nilai kebenaran suatu proposisi adalah kebenaran atau kesalahan proposisi tersebut, dinyatakan dengan **benar** (T) dan **salah** (F), atau menggunakan simbol 1 untuk benar dan 0 untuk salah.

Biasanya digunakan huruf $p, q, r, s, \cdots$ sebagai variabel yang menyatakan proposisi. Misalkan p suatu proposisi kita nyatakan nilai kebenaran p dengan lambang $\tau(p)$. Bidang logika yang berkenaan dengan para proposisi disebut **kalkulus proposisi** atau **logika proposisi**.

Definisi 1.3. [Negasi] Misalkan p suatu proposisi. Negasi p dinyatakan $\neg p$ (kadang-kadang dengan notasi $\sim p$, atau $\widetilde{p}$) adalah pernyataan yang berbentuk "bukan p", atau "ini bukanlah bersifat p". Nilai pernyataan p dan $\neg p$ selalu bertolak belakang. Tabel kebenaran proposisi dan negasinya diberikan sebagai berikut:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Table 1.1: Tabel kebenaran proposisi dan negasinya

Negasi dapat pula diperluas untuk pernyataan deklaratif biasa.

Contoh 1.6. Tentukan negasi pernyataan berikut

1. Hari ini adalah Jumat.
2. Paling sedikit ada 500 orang meninggal karena kelaparan.
3. $x + 1 = 3$.
4. $x < 5$.

Penyelesaian. Untuk kalimat 1, negasinya adalah "Hari ini **bukan** jumat". Negasi dari kalimat 2 adalah "Tidak lebih dari 500 orang yang meninggal karena kelaparan". Negasi kalimat 3 adalah "$x + 1 \neq 3$", dan negasi kalimat 4 adalah "$x \geq 5$".

Negasi $\neg$ dapat dipandang sebagai suatu operator dimana bila p suatu proposisi maka $\neg p$ merupakan proposisi baru sebagai hasil operasi dari operator $\neg$ terhadap proposisi p. Di sini operator $\neg$ bekerja pada proposisi tungal. Berikut ini kita membahas operator logika yang digunakan untuk membentuk proposisi baru dari dua proposisi. Operator logika seperti ini disebut **konektivitas** [3]. Sebelum masuk pada pokok bahasan berikutnya, diperhatikan puzzle berikut ini yang dikutip dari Averbach dan Chein (200) dalam [1].

Puzzle1. Tiga orang siswa si A, si B dan si C sedang duduk di tangga sekolah sambil bercekrama satu sama lainnya. Ketiga siswa tersebut terdiri dari pembohong dan penjujur. Pembohong adalah orang yang selalu berkata bohong, sedangkan penjujur adalah orang yang selalu berkata jujur. Seorang guru berjalan dan melintasi mereka. Sang guru bertanya, "siapa diantara kalian yang pembohong dan penjujur?". Si A menjawab, tapi jawabannya tidak jelas. Kemudian, guru bertanya kepada B tentang jawaban si A tadi. Si B menjawab "si A tadi bilang bahwa dia orang jujur". Selanjutnya, si C menimpali dengan pernyataan "Pak, jangan percaya B dia itu pembohong". Siapakah pembohong dan siapa penjujur diantara mereka?

Penyelesaian. Bila A seorang penjujur maka dia pasti mengatakan yang sebenarnya, yaitu "Saya orang jujur". Sebalinya, jika A pembohong maka ia akan berkata "Saya orang jujur" (Ingat: pembohong selalu berkata sebaliknya). Sehingga, apapun keadaannya, A pasti mengatakan "Saya orang jujur". Jadi, si B adalah penjujur dan si C pembohong. Sedangkan si A tidak dapat diketahui dengan pasti.

1.2 Kalimat majemuk dan konektivitas

Definisi 1.4. Kalimat majemuk adalah kalimat yang terdiri dari gabungan beberapa proposisi. Penggabungan dua proposisi menggunakan konektivitas. Ada 4 konektivitas, yaitu konjungsi ($\wedge$), disjungsi ($\vee$), implikasi ($\rightarrow$), biimplikasi ($\leftrightarrow$) dan *exclusive or* ($\oplus$).

Konjungsi

Definisi 1.5. Misalkan p dan q dua proposisi. Konjungsi dari p dan q, ditulis $p \wedge q$ adalah proposisi "p dan q", dimana ia bernilai benar jika kedua p dan q benar, dan salah untuk kasus lainnya. Konjungsi dapat pula didefinisikan pada pernyataan yang bukan proposisi. Bila minimal salah satu dari p atau q bukan proposisi maka konjungsi $p \wedge q$ juga bukan proposisi.

Karena ada 2 proposisi dan ada 2 kemungkinan nilai kebenaran maka akan terdapat $2 \times 2 = 4$ kemungkinan nilai kebenaran konjungsi, seperti diberikan pada tabel kebenaran berikut.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Table 1.2: Tabel kebenaran konjungsi

Contoh 1.7. Tentukan konjungsi pernyataan berikut, kemudian tentukan nilai kebenarannya.

1. p: "hari ini Sabtu", q : "hari ini hujan".
2. p: "Yogyakarta terletak di pulau Jawa", "q: $3 + 2 = 5$".
3. p: " $x + 1 = 3$", q : "2 adalah bilangan prima".

Penyelesian.

1. $p \wedge q$: "hari ini Sabtu dan hari ini hujan", atau disingkat "hari ini Sabtu dan hujan". Nilai kebenaran p bergantung kapan kalimat ini diucapkan. Bila diucapkan pada hari Sabtu maka $\tau(p) = T$, tetapi jika diucapkan pada hari selain Sabtu maka $\tau(p) = F$. Nilai kebenaran q bergantung pada situasi hari pada hari diucapkan. Bila pada hari diucapkan turun hujan maka $\tau(q) = T$, tetapi jika pada itu tidak hujan maka $\tau(q) = F$. Jadi kebenaran konjungsi $\tau(p \wedge q)$ bersifat tentatif dan situasional.
2. $p \wedge q$: "Yogyakarta terletak di pulau Jawa dan $3 + 2 = 5$". Karena $\tau(p) = T$ dan $\tau(q) = T$ maka $\tau(p \wedge q) = T$.
3. $p \wedge q$: "$x + 1 = 3$ dan 2 adalah bilangan prima". Sudah pasti $\tau(q) = T$, tetapi $\tau(p)$ tidak dapat dipastikan sehingga $\tau(p \wedge q)$ juga belum dapat dipastikan. Dalam soal ini, p bukan proposisi. Akibatnya $p \wedge q$ juga bukan proposisi.

Disjungsi

Definisi 1.6. Misalkan p dan q dua proposisi. Disjungsi dari p dan q, ditulis $p \vee q$ adalah proposisi "p atau q", dimana ia bernilai salah jika kedua p dan q salah, dan benar untuk kasus lainnya. Sama halnya dengan konjungsi, disjungsi dapat diperluas untuk pernyataan yang bukan proposisi.

Dengan kata lain $\tau(p \vee q) = T$ bila paling sedikit ad satu proposisi yang benar. Tabel kebenaran disjungsi diberikan sebagai berikut.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Table 1.3: Tabel kebenaran disjungsi

Contoh 1.8. Misalkan p : "mahasiswa yang mengambil kuliah kalkulus dapat masuk kelas ini", q : "mahasiswa yang mengambil kuliah ilmu komputer dapat masuk kelas ini". Disjungsi dari kedua pernyataan ini adalah $p \vee q$:"mahasiswa yang mengambil kuliah kalkulus atau ilmu komputer dapat masuk kelas ini". Bila disjungsi $p \vee q$ ditetapkan sebagai peraturan maka ada tiga kelompok mahasiswa yang dapat masuk kelas ini (misalkan kuliah fondasi matematika), yaitu

- mahasiswa yang hanya mengambil kuliah kalkulus saja,
- mahasiswa yang hanya mengambil kuliah ilmu komputer saja,
- mahasiswa yang mengambil kuliah kalkulus dan ilmu komputer sekligus.

Tetapi, mahasiswa yang belum mengambil kuliah kalkulus maupun ilmu komputer tidak boleh masuk kelas ini.

Contoh 1.9. Tentukan disjungsi pernyataan berikut, kemudian tentukan nilai kebenarannya.

- p: "hari ini Sabtu", q : "hari ini hujan".

Penyelesaian. $p \vee q$: "hari ini Sabtu atau hari ini hujan". Sama dengan bentuk konjungsi sebelumnya, nilai kebenaran $\tau(p \vee q)$ bersifat tentatif atau situasional. Ada 3 kemungkinan $\tau(p \vee q) = T$, yaitu ketika diucapkan pada hari Sabtu dan saat itu hujan, ketika diucapkan pada hari Sabtu meskipun saat itu tidak hujan, dan ketika diucapkan pada hari selain Sabtu tapi saat itu hujan. Hanya ada 1 kemungkinan $\tau(p \vee q) = F$ yaitu ketika diucapkan bukan pada hari Sabtu dan bukan pada saat hujan.

Disjungsi eksklusif atau *exclusive-OR*

Definisi 1.7. Misalkan p dan q dua proposisi. Eksklusif or dari p dan q, ditulis $p \oplus q$ adalah proposisi yang bernilai benar jika tepat satu diantara p atau q bernilai benar, dan bernilai salah untuk kasus lainnya. Notasi eksklusif or kadangkala menggunakan XOR.

Berikut diberikan tabel kebenaran disjungsi eksklusif.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Table 1.4: Tabel kebenaran disjungsi eksklusif

Berbeda dengan disjungsi biasa (inklusif), nilai kebenaran disjungsi eksklusif menjadi salah jika kedua pernyataan p dan q benar.

Implikasi atau kalimat bersyarat

Definisi 1.8. Misalkan p dan q dua proposisi. Pernyataan $p \to q$ adalah proposisi "jika p maka q" dimana ia bernilai salah jika p benar dan q salah, kasus lainnya bernilai salah. Pernyataan $p \to q$ disebut juga **kalimat bersyarat**, dimana p disebut **hipotesis** atau **premis** atau *antecedent* dan q disebut **kesimpulan** atau **konklusi** atau **konsekuensi**.

Pernyataan $p \to q$ dikatakan kalimat bersyarat karena $p \to q$ menegaskan bahwa q pasti berlaku asalkan p dipenuhi. Tabel kebenaran implikasi diberikan sebagai berikut.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Table 1.5: Tabel kebenaran implikasi

Fakta langsung dimana $p \to q$ bernilai benar :

- jika kedua p dan q benar (lihat tabel baris 1),
- jika p salah, tidak masalah apapun nilai kebenaran q (lihat tabel baris 3 dan 4).

Istilah lain untuk penyebutan $p \to q$, seperti diberikan dalam [3, 1] adalah sebagai berikut:

- "p mengakibatkan q",
- "p adalah syarat cukup bagi q",
- "q adalah syarat perlu untuk p",
- "p hanya jika q",
- "q asalkan p"
- "q bilamana p".

Contoh 1.10. Jelaskan maksud kalimat implikasi berikut !

- ▶ Sebuah toko memberikan iklan berikut "Jika nilai belanja anda lebih dari 100 ribu rupiah maka anda mendapat potongan 10%".

Penyelesaian. Diketahui p : "nilai belanja anda di atas 100 ribu", q : "anda mendapat potongan 10%". Pernyataan pada iklan tersebut berbentuk $p \to q$ yang diasumsikan berlaku atau benar. Bila nilai belanja anda melebihi 100 ribu (p benar), maka anda dipastikan mendapat potongan 10% (q harus benar atau dipenuhi) agar $p \to q$ benar. Tetapi jika belanja anda kurang dari 100 ribu (p salah) maka anda mungkin dapat potongan (q benar) atau mungkin juga tidak dapat potongan (q salah). Dalam kasus pihak toko tidak memberi potongan maka tidak ada yang salah karena syaratnya tidak dipenuhi. Tetapi, dalam kasus pihak toko memberi potongan juga tidak ada yang salah, pihak toko sedang berbaik hati. ■

Untuk memudahkan mengingat nilai kebenaran kalimat berbentuk implikasi, diperhatikan ilustrasi berikut ini.

Misalkan p : "soal ujian", q : "jawaban yang diberikan siswa". Kalimat $p \to q$ dapat dibayangkan sebagai nilai yang diberikan guru. Beberapa kemungkinan kombinasi soal ujian dan jawaban siswa, yaitu

1. Bila soal benar, siswa menjawab benar maka guru harus memberi nilai benar,
2. Bila soal benar, siswa menjawab salah maka guru akan memberi nilai salah,
3. Bila soal salah, siswa menjawab benar maka guru harus memberi nilai benar,
4. Bila soal salah, siswa menjawab salah maka guru harus membari nilai benar (soal bonus).

Walaupun ilustrasi ini tidak begitu pas dengan definisi implikasi, namun ia dapat dijadikan sebagai cara sederhana untuk mengingat aturan implikasi.

Contoh 1.11. Perhatikan implikasi berikut, tentukan nilai kebenaran masing-masing!

1. Jika hari ini cerah maka kita pergi ke pantai.

2. Jika hari ini Jumat maka $2 \times 3 = 6$.

Penyelesaian. Kalimat 1 bernilai benar untuk hampir semua keadaan, kecuali satu keadaan dimana kita tidak pergi ke pantai padahal hari ini cerah. Pada implikasi ini hipotesis dan konklusi berhubungan yaitu sebagi hubungan sebab akibat. Kalimat 2 selalu benar untuk semua kasus karena q sudah bernilai benar. Hipotesis dan konklusi pada kalimat 2 tidak berhubungan seperti dalam bahasa normal. ■

Contoh 1.12. Misalkan $a = 3, b = 5$ dan $c = 6$. Tentukan nilai kebenaran implikasi berikut

$$(\neg(a > b)) \wedge (b < c) \to \neg\left[(a \leq b) \vee (b > c)\right].$$

Penyelesaian. Misalkan $p = \underbrace{(\neg(a > b))}_{p_1} \wedge \underbrace{(b < c)}_{p_2}$. Karena $\tau(a > b) = \tau(3 > 5) = F$ maka $\tau(p_1) = T$. Juga, dperoleh $\tau(p_2) = \tau(5 < 6) = F$. Jadi $\tau(p) = \tau(p_1 \wedge p_2) = F$. Misalkan juga $q = \neg[\underbrace{(a \leq b)}_{q_1} \vee \underbrace{(b > c)}_{q_2}]$. Mudah dipahami bahwa $\tau(q_1) = T$, $\tau(q_2) = F$ sehingga $\tau(q_1 \vee q_2) = F$ dan akibatnya $\tau(q) = T$. Akhirnya disimpulkan kalimat di atas yang berbentuk $p \to q$ bernilai benar. ■

Contoh 1.13. Tentukan nilai variabel x yang baru jika pada pernyataan berikut "Jika $x > 2$ maka $x := x + 1$" dimasukkan $x = 1$ dan 3.

Penyelesaian. Notasi := berarti "didefinisikan sebagai" atau "nilainya sama dengan". Kalimat ini berbentuk implikasi $p \to q$ dimana p :"$x > 2$" dan q :"$x := x + 1$". Bila masukkan $x = 3$ maka $\tau(p) = T$ sehingga q harus dilaksanakan, yaitu $x := 2 + 1 = 3$. Jadi x yang baru adalah 3. Bila masukkan $x = 1$ maka $\tau(p) = F$ sehingga tidak ada keharusan q dilaksanakan. Bila ini diprogram pada komputer maka nilai variabel x tidak berubah, yaitu tetap $x = 1$. ■

Bi-implikasi atau implikasi dua arah

Definisi 1.9. Misalkan p dan q dua proposisi. Pernyataan $p \leftrightarrow q$ adalah proposisi "p jika dan hanya jika q" dimana ia bernilai benar jika kedua p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, kasus lainnya bernilai salah.

Pernyataan $p \leftrightarrow q$ dikatakan implikasi dua arah karena terdiri dari dua implikasi yaitu $p \to q$ dan $q \to p$. Penyebutan lain dari $p \leftrightarrow q$ adalah

- "p bila dan hanya bila q"
- "p adalah syarat perlu dan cukup bagi q"
- "jika p maka q, dan sebaliknya".

Berdasarkan definisi tersebut, tabel kebenaran untuk bi-implikasi disusun sebagai berikut

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Table 1.6: Tabel kebenaran bi-implikasi

Dengan mudah dapat diperiksa bahwa tabel kebenaran $p \leftrightarrow q$ sama dengan nilai kebenaran $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

Contoh 1.14. Misalkan p pernyataan "Anda dapat mengikuti kuliah" dan q pernyataan "Anda membayar SPP". Maka pernyataan $p \leftrightarrow q$ adalah

"Anda dapat mengikuti kuliah bila hanya bila anda membayar SPP."

Pernyataan ini bernilai benar jika p dan q keduanya benar, atau keduanya salah. Misalkan pernyataan $p \leftrightarrow q$ dianggap suatu peraturan maka peraturan ini dilanggar apabila

- Anda mengikuti kuliah, tetapi Anda tidak membayar SPP (pelanggaran dilakukan mahasiswa),
- Anda tidak dapat mengikuti kuliah, padahal Anda membayar SPP (pelanggaran dilakukan kampus).

Sebaliknya, peraturan ini tidak dilanggar apabila

- Anda mengikuti kuliah, dan Anda membayar SPP,
- Anda tidak mengikuti kuliah, dan Anda tidak membayar SPP.

Puzzle2. Tiga orang bersaudara, Ali, Bobi dan Cendy melapor kepada orang tua mereka dengan jujur pernyataan sebagai berikut
Ali : "Jika saya lulus matematika maka Bobi juga lulus matematika. Saya lulus bahasa Inggris bila hanya bila Cendy lulus bahasa Inggris."
Bobi : "Jika saya lulus matematika maka Ali juga lulus matematika. Ali tidak lulus sejarah."
Cendy: "Hanya berlaku salah satunya: Ali lulus sejarah, atau Saya tidak lulus sejarah. Jika Bobi tidak lulus bahasa Inggris maka Ali juga tidak lulus bahasa Inggris."

Bila masing-masing dari ketiga orang tersebut lulus paling sedikit satu pelajaran, dan setiap pelajaran pasti dapat diluluskan oleh paling sedikit satu orang, dan jika Cendy tidak lulus sebanyak pelajaran yang diluluskan oleh kedua saudaranya. Tentukan pelajaran apa saja mereka lulus ?

Penyelesaian. Pertama kita kumpulkan dulu semua pernyataan dan persyaratan yang ada, yaitu

1. Ali : "Jika saya lulus matematika maka Bobi juga lulus matematika."
2. Ali: "Saya lulus bahasa Inggris bila hanya bila Cendy lulus bahasa Inggris."
3. Bobi: "Jika saya lulus matematika maka Ali juga lulus matematika."
4. Bobi: "Ali tidak lulus sejarah."

5. Cendy: "Hanya berlaku salah satunya: Ali lulus sejarah, atau Saya tidak lulus sejarah."
6. Cendy: "Jika Bobi tidak lulus bahasa Inggris maka Ali juga tidak lulus bahasa Inggris."
7. Tiap orang pasti lulus minimal satu pelajaran.
8. Setiap pelajaran pasti diluluskan oleh paling sedikit satu orang.
9. Banyak pelajaran yang diluluskan Cendy tidak sebanyak pelajaran yang diluluskan oleh kedua saudaranya.

Dari kesembilan pernyataan di atas, dapat dikelompokkan secara bertahap sebagai berikut. Untuk menyingkat kita gunakan lambang A, B, C untuk ketiga orang Ali, Bobi, Cendy; M, E, S untuk Matematika, bahasa Inggris (English), Sejarah

- Pernyataan 1 dan 3 berkenaan dengan pelajaran matematika. Kedua pernyataan digabungkan menjadi "Ali lulus matematika bila hanya bila Bobi lulus matematika. Jadi ada 2 kemungkinan berikut.

	M
A	$\surd$
B	$\surd$
C	

atau

	M
A	$\times$
B	$\times$
C	

- Perhatikan pernyataan 2 yang berkaitan dengan English. Untuk pernyataan 2, yaitu "Ali lulus bahasa Inggris bila hanya bila Cendy lulus bahasa Inggris", mempunyai dua kemungkinan yang dapat terjadi, yaitu
  - ▷ Ali dan Cendy kedua lulus bahasa Inggris, atau
  - ▷ Ali dan Cendy keduanya tidak lulus bahasa Inggris.

  Kombinasi dengan diagram sebelumnya menghasilkan 4 kemungkian diagram berikut

I

	M	E
A	√	√
B	√	
C		√

II

	M	E
A	√	×
B	√	
C		×

III

	M	E
A	×	√
B	×	
C		√

IV

	M	E
A	×	×
B	×	
C		×

- Pernyataan 6 juga berkaitan dengan bahasa Inggris, yaitu "Jika Bobi tidak lulus bahasa Inggris maka Ali juga tidak lulus bahasa Inggris." Agar implikasi ini bernilai TRUE maka harus berlaku salah satu dari 3 kemungkinan berikut, yaitu

  - Bobi tidak lulus dan Ali tidak lulus bahasa Inggris,
  - Bobi lulus dan Ali tidak lulus bahasa Inggris
  - Bobi lulus dan Ali lulus bahasa Inggris.

  Kemungkinan 1 dan 2 bertentangan dengan diagram I karena Ali seharusnya lulus. Jadi tinggal kemungkinan 3, yaitu Bobi dan Ali lulus. Kemungkinan ini konsisten dengan diagram I dan III. Karena pasti ada orang yang lulus bahasa Inggris diantara mereka bertiga maka diagram II dan IV harus disesuaikan, dan diperoleh pemutakhiran diagram sebagai berikut.

I

	M	E
A	√	√
B	√	√
C		√

II

	M	E
A	√	×
B	√	√
C		×

III

	M	E
A	×	√
B	×	√
C		√

IV

	M	E
A	×	×
B	×	√
C		×

- Sekarang perhatikan pelajaran sejarah. Berdasarkan pernyataan 4 dan 5 maka disimpulkan "Ali tidak lulus sejarah dan Cendy tidak lulus sejarah". Karena pasti ada yang lulus pada setiap pelajaran maka haruslah "Bobi lulus sejarah". Perbaharui diagram-diagram pada tabel sebelumnya, diperoleh

I

	M	E	S
A	√	√	×
B	√	√	√
C		√	×

II

	M	E	S
A	√	×	×
B	√	√	√
C		×	×

III

	M	E	S
A	×	√	×
B	×		√
C		√	×

IV

	M	E	S
A	×	×	×
B	×		√
C		×	×

- Perhatikan diagram IV bertentangan dengan pernyataan 7 sehingga harus dibuang. Dengan menggunakan pernyataan 7 dan 8 pada diagram II dan III maka diperoleh pembaruan diagram sebagai berikut.

I

	M	E	S
A	√	√	×
B	√	√	√
C		√	×

II

	M	E	S
A	√	×	×
B	√	√	√
C	√	×	×

III

	M	E	S
A	×	√	×
B	×		√
C	√	√	×

- Pernyataan 9 menyatakan banyak pelajaran yang dilulukan Cendy tidak sebanyak yang diluluskan oleh kedua saudaranya maka diagram II dan III harus dibuang. Tersisalah diagram I. Dengan pernyataan 9 lagi, Cendy hanya lulus 1 pelajaran sehingga diperoleh diagram terakhirnya sebagai berikut.

I

	M	E	S
A	√	√	×
B	√	√	√
C	×	√	×

- Kesimpulannya: Ali lulus matematika dan bahasa Inggris, Bobi lulus ketiganya dan Cendy hanya lulus bahasa Inggris. ■

Puzzle ini dikutip dari Aberbach (2000) di dalam [1].

Konvers, kontraposisi dan invers

Berangkat dari implikasi $p \to q$ kita dapat membentuk tiga pernyataan implikasi relevan yang sering muncul, yaitu

$q \to p$ disebut **konvers**, $\neg q \to \neg p$ disebut **kontraposisi**,$\neg p \to \neg q$ disebut **invers**.

Contoh 1.15. Tentukan konvers, kontraposisi dan invers dari pernyataan "Tim tuan rumah akan menang bilamana hari hujan".

Penyelesaian. Kalimat ini sesungguhnya berupa implikasi $p \to q$ dimana p : "Hari hujan" dan q : "Tim tuan rumah menang". Dengan kata lain dapat ditulis sebagai "Jika hari hujan maka tim tuan rumah menang". Jadi diperoleh,
Konvers: "Jika tuan rumah menang maka hari hujan."
Kontraposisi: "Jika tuan rumah tidak menang maka hari tidak hujan."
Invers: "Jika hari tidak hujan maka tim tuan rumah tidak menang." ■

Dari ketiga implikasi baru ini, kontraposisi selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan implikasi semula. Penjelasannya sebagai berikut. Kontraposisi $\neg q \to \neg p$ selalu FALSE jika $\tau(\neg q) = T$ dan $\tau(\neg p) = F$, atau $\tau(q) = F$ dan $\tau(p) = T$. Keadaan ini juga membuat implikasi $p \to q$ bernilai FALSE. Tabel kebenaran keempat bentuk implikasi ini diberikan pada tabel berikut.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T

Table 1.7: Tabel kebenaran implikasi, konvers, kontraposisi dan invers

Terlihat jelas, nilai kebenaran implikasi dan kontraposisi selalu sama. Hal yang sama juga terjadi pada konvers dan invers. Pada bagian berikutnya, dua pernyataan majemuk yang berbeda tetapi mempunyai kebenaran yang sama disebut **ekuivalen** secara logis.

Sebelum kita lanjutkan ke pembahasan berikutnya, kita pahami dulu puzzle ciptaan oleh Raymond Smullyan yang diambil dari [3] sebagai berikut.

Puzzle3. Ada dua orang, katakan A dan B. Mereka berasal dari para penjujur dan para pembohong; penjelasannya seperti pada puzzel1. Identifikasilah mereka jika A mengatakan bahwa "B penjujur" dan B mengatakan "kami berdua beroposisi".

Penyelesaian. Misalkan p pernyataan "A penjujur", dan q pernyataan "B penjujur". Jadi $\neg p$ pernyataan "A pembohong", dan $\neg q$ pernyataan "B pembohong". Amati kemungkinan berikut:

- Misalkan A penjujur, yaitu $\tau(p) = T$ maka ia akan mengatakan yang sebenarnya. Karena A mengatakan "B penjujur" maka disimpulkan, $\tau(q) = T$. Karena B penjujur maka haruslah salah satu dari mereka pembohong, yaitu pernyataan $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ selalu TRUE. Hal ini tidaklah mungkin, sehingga disimpulkan A pembohong.
- Karena A pembohong, maka A mengatakan yang sebaliknya. Karena A mengatakan B penjujur maka sesungguhnya B adalah pembohong. Periksa konsitensinya! Karena B mengatakan bahwa mereka beroposisi adalah suatu pernyataan yang salah. Jadi B pembohong, yaitu konsisten dengan hasil sebelumnya dimana A dan B adalah pembohong. Jadi, A dan B keduanya adalah pembohong.

1.3 Ekuivalensi proposisi

Dalam matematika, khususnya dalam memahami atau membuktikan kebenaran suatu pernyataan terkadang diperlukan menyajikannya dalam bentuk proposisi lain yang nilai kebenarannya sama. Proposisi yang dimaksud di sini adalah proposisi majemuk, yaitu proposisi yang terdiri dari beberapa proposisi tunggal yang dihubungkan oleh operator logika, seperti $p \wedge q$.

Tautologi dan kontradiksi

Definisi 1.10. Proposisi majemuk yang selalu bernilai benar tanpa terpengaruh oleh nilai kebenaran proposisi tunggal yang menyusunnya disebut **tautologi**. Sebaliknya, proposisi majemuk yang selalu bernilai salah tidak terpengaruh oleh nilai kebenaran proposisi yang menyusunnya disebut **kontradiksi**.

Contoh 1.16. Proposisi $p \vee \neg p$ adalah tautologi, dan $p \wedge \neg p$ adalah kontradiksi. Untuk memahami ini, diperhatiakan tabel berikut

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$q \wedge \neg q$
T	F	T	F
F	T	T	F

Table 1.8: Contoh tautologi dan kontradiksi

Definisi 1.11. Beberapa propoposisi majemuk dikatakan **ekivalen logis** jika mereka mempunyai nilai kebenaran yang sama dalam semua kasus. Dengan kata lain, pernyataan majemuk P dan Q dikatakan **ekivalen logis** jika $P \leftrightarrow Q$ sebuah tautologi. Selanjutnya, untuk P dan Q ekuialen logis ditulis $P \equiv Q$.

Contoh 1.17. Misalkan P adalah implikasi $p \to q$ dan Q adalah kontraposisinya $\neg q \to \neg p$. Buktikan $P \equiv Q$.

Penyelesaian. Langsung diperhatikan tabel berikut !

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$P : p \to q$	$Q : \neg q \to \neg p$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Table 1.9: Contoh ekuivalensi logis

Pada kolom terakhir jelas bahwa $P \leftrightarrow Q$ merupakan tautologi, jadi terbukti $P \equiv Q$. ∎

Contoh 1.18. Buktikan $\neg(p \vee q)$ dan $\neg p \wedge \neg q$ adalah ekuivalen logis. Bentuk ini disebut aturan De Morgan.

Penyelesaian. Langsung gunakan tabel berikut.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$P : \neg(p \vee q)$	$Q : \neg p \wedge \neg q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

Table 1.10: Contoh ekuivalensi logis De Morgan

Terlihat dengan jelas bahwa $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. ■

Beberapa bentuk ekuivalensi dasar

Misalkan T pernyataan yang selalu bernilai TRUE dan F pernyataan yang selalu bernilai FALSE maka berlaku

1. Hukum Identitas : $p \wedge T \equiv p$ dan $p \vee F \equiv p$.
2. Hukum dominasi : $p \vee T \equiv T$ dan $p \wedge F \equiv F$.
3. Hukum idempoten : $p \vee p \equiv p$ dan $p \wedge p \equiv p$.
4. Hukum negasi ganda : $\neg(\neg p) \equiv p$.
5. Hukum komutatif : $p \vee q \equiv q \vee p$ dan $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
6. Hukum asosiatif : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ dan $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
7. Hukum distributif : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ dan $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
8. Hukum De Morgan : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ dan $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.
9. Hukum absorpsi : $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ dan $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.
10. Hukum negasi : $p \vee \neg p \equiv T$ dan $p \wedge \neg p \equiv F$.

Ekuivalensi di atas dapat dibuktikan dengan menggunakan Tabel Kebenaran. Hukum De Morgan dapat diperluas untuk sejumlah berhingga proposisi, yaitu

$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$ dan $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) = \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n$. Pembuktian hukum De Morgan umum ini dilakukan dengan menggunakan induksi matematika yang akan dibahas pada Bab lainnya dalam buku ini.

Contoh 1.19. Buktikan $p \to q$ dan $\neg p \vee q$ ekuivalen logis.

Bukti. Diperhatikan tabel berikut

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Karena nilai kebenaran dua kolom terakhir sama maka disimpulkan kedua proposisi majemuk ini ekuivalen logis. ■

Pembuktian ekuivalensi logis dapat dilakukan melalui penjabaran dengan menggunakan hukum dasar seperti contoh berikut.

Contoh 1.20. Buktikan $\neg(p \to q)$ dan $p \wedge \neg q$ ekuivalen logis tanpa menggunakan Tabel Kebenaran.

Bukti. Perhatikan penjabaran berikut

$$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \quad \text{dengan contoh sebelumnya} \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \quad \text{Hukum De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \neg q \quad \text{Hukum negasi ganda} \end{aligned}$$

Contoh 1.21. Buktikan $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ adalah tautologi.

Bukti. Coba berikan justifikasi aturan/hukum yang digunakan pada setiap langkah pembuktian berikut

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\ &\equiv T \vee T \\ &\equiv T. \ \blacksquare\end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN BAB 1

1. Diantara kalimat berikut, tentukan mana yang berupa proposisi dan mana yang bukan proposisi ? Bila ia proposisi, tentukan nilai kebenarannnya.
   a) Madura terletak di pulau Jawa.
   b) $2 + 5 = 6$.
   c) $a + 2 = 11$.
   d) Jawablah pertanyaan berikut.
   e) $x + y = y + x$ untuk setiap pasangan bilangan real x dan y.
   f) Jangan melintas.
   g) $x + 1 = 5$ if $x = 1$.
2. Tentukan negasi untuk masing-masing pernyataan berikut :
   a) Hari ini adalah hari senin.
   b) $x > 5$.
   c) $2 + 3 = 5$.
   d) Warna bendera RI adalah merah putih.
   e) Musim panas di Miami tidak panas dan cerah.

f) Tidak ada polusi udara di Yogyakarta.

3. Diberikan pernyataan p : "saya mengikuti kuliah dengan serius" dan q : "masa depan saya lebih baik". Nyatakan proposisi berikut dalam bahasa Indonesia.

   a) $p \to q$

   b) $\neg p \to \neg q$

   c) $\neg p \wedge \neg q$

   d) $\neg p \vee (p \wedge q)$

4. Misalkan p, q dan r adalah proposisi sebagai berikut
   p : kamu terserang flu, q : kamu tidak dapat ikut ujian, r : kamu lulus mata kuliah. Nyatakan proposisi berikut dalam bahasa Indonesia

   a) $\neg q \leftrightarrow r$

   b) $q \to \neg r$

   c) $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$

   d) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$.

5. Misalkan p, q dan r adalah proposisi sebagai berikut
   p : kamu mendapat nilai A pada UAS, q : kamu mengerjakan semua soal latihan, r : kamu lulus mata kuliah ini dengan nilai A. Nyatakan proposisi berikut dalam p, q dan r beserta dengan simbol konektivitasnya.

   a) Kamu lulus mata kuliah dengan nilai A, tetapi kamu tidak mengerjakan semua soal latihan.

   b) Kamu mendapat A pada UAS, kamu mengerjakan semua latihan, dan kamu lulus dengan nilai A.

   c) Untuk mendapatkan nilai A pada mata kuliah ini, perlu bagi kamu untuk mendapatkan nilai A pada UAS.

   d) Kamu tidak mendapat A pada UAS, tetapi kamu tidak mengerjakan semua soal latihan, namun kamu lulus mata kuliah dengan nilai A.

   e) Mendapat A pada UAS dan mengerjakan semua soal latihan adalah syarat cukup untuk lulus mata kuliah dengan nilai A.

6. [Puzzle] Disaat sedang berlayar, seorang pelaut bernama Silas mengalami kecelakaan karena kapalnya menghantam batu karang. Untuk menyelamatkan diri Silas berenang ke pulau terdekat dan tibalah ia di suatu pesisir. Karena terlalu capek, tertidurlah ia di pesisir tersebut. Dalam tidurnya, Silas bermimpi didatangi dua orang yang mempunyai kesamaan dalam semua aspek sehingga tidak dapat dibedakan. Tetapi mereka berdua berasal dari dua kampung yang berbeda, yang satu berasal dari kampung Jujur dimana penduduknya selalu berkata benar dan yang lainnya berasal dari kampung Bohong dimana penduduknya selalu berkata salah. Ketika terbangun, Silas benar-benar bertemu dengan dua orang mirip tersebut seperti dalam mimpinya. "Dimana saya berada", kata Silas bertanya. "Di pulau Hamlock", balas orang pertama. "Saya adalah Glog dan dia adalah Glum", sambung orang pertama lagi. "Tidak, saya Glog dan dia Glum", kata orang kedua. Tiba-tiba muncul orang ketiga. Sambil menunjuk kedua orang tadi, Silas bertanya kepada orang ketiga "Siapa diantara mereka yang dapat saya percaya?". "Dia dan Saya berasal dari kampung yang sama", kata orang ketiga sambil menunjuk orang pertama. "Itu benar, mereka memang berasal dari kampung yang sama", kata orang kedua. Nah, siapa yang berkata benar dan siapa yang berbohong.

7. [Puzzle] Menyambung cerita soal sebelumnya, akhirnya, Silas memilih untuk hidup menetap di pulau tersebut. Selama 6 tahun tinggal di sana, Silas tetap sulit membedakan secara visual mengenai asal kampung mereka karena mereka semuanya mirip satu sama lainnya. Suatu hari Silas bertemu dua orang. Orang pertama mengatakan bahwa mereka berdua berasal dari kampung yang berbeda, sedangkan orang kedua menyatakan bahwa orang pertama adalah pembohong. Penduduk kampung mana saja mereka berdua ?

8. Tentukan nilai kebenaran proposisi-proposisi berikut, berikan alasannya.

   a) $1 + 2 = 4$ bila hanya bila pinguin dapat terbang.

b) $0 > 1$ bila hanya bila $2 > 1$.

c) Jika $1 + 1 = 3$ maka $2 + 2 = 5$.

d) Jika $1 + 1 = 2$ maka $2 + 2 = 5$.

e) Jika pinguin dapat terbang maka $1 + 1 = 4$.

f) Jika $1 + 1 = 4$ maka Tuhan ada.

9. Program komputer sering menggunakan kalimat dalam bentuk implikasi. Bila hipotesisnya dipenuhi maka komputer mengeksekusi perintah yang diberikan. Tetapi bila hipotesisnya tidak dipenuhi maka komputer tidak melakukan tindakan apa-apa. Tentukan nilai x setelah pernyataan berikut dalam suatu program komputer dimasukkan $x = 2$.

   a) Jika $(1 + 1 = 3) \vee (2 + 2 = 3)$ maka $x := x + 1$.

   b) Jika $(1 + 1 = 2) \oplus (2 + 2 = 4)$ maka $x := x + 1$.

   c) Jika $x < 2$ maka $x := x + 1$.

   d) Jika x bilangan genap postif maka $x := x + 1$.

10. [Puzzle, paradoks tukang cukur] Suatu legenda mengatakan bahwa pada zaman dahulu kala, di sebuah daerah terisolir bahwa para tukang cukur hanya mencukur orang-orang yang tidak dapat mencukur dirinya sendiri. Mungkinkah ada tukang cukur demikian itu? Jelaskan dengan alasan yang logis.

11. Nyatakan konvers, kontraposisi dan invers pernyataan dalam bentuk implikasi berikut.

    a) Jika malam ini hujan maka saya akan tetap tinggal di rumah.

    b) Suatu bilangan positif adalah prima hanya jika ia tidak mempunyai pembagi selain 1 dan dirinya sendiri.

    c) Ketika saya begadang, perlu bagi saya untuk tidur sampai tengah hari.

    d) Saya pergi ke pantai bilamana hari cerah.

12. Buktikan ekuivalensi logis berikut.
    a) $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
    b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
    c) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.
    d) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$.
13. Tanpa menggunakan Tabel Kebenaran, buktikan ekuivalensi logis berikut. Berikanlah justifikasi hukum/aturan pada setiap langkah yang ada.
    a) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
    b) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$
    c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$.
    d) $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$.
14. Dengan menggunakan Tabel kebenaran dan penjabaran, buktikan berikut ini adalah tautologi.
    a) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$.
    b) $\neg p \wedge (p \vee q) \equiv q$.
    c) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \rightarrow r$.
    d) $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv r$.
15. Dengan menggunakan hukum De Morgan, tentukan ingkaran kalimat berikut.
    a) Januar kaya dan bahagia.
    b) Mely berjalan kaki atau naik bus untuk menuju kampus.
    c) Keith akan bekerja pada industri atau melanjutkan sekolah.

2 KUANTOR

2.1 Fungsi proposisi

Dalam matematika, kalimat "x lebih dari 2", ditulis $x > 2$ terdiri dari dua komponen, yaitu variabel "x" sebagai subjek dan "lebih dari 2" sebagai predikat yang menyatakan sifat yang dimiliki oleh subjek x. Selanjutnya, kalimat "x lebih dari 2" dinyatakan sebagai $P(x)$ dimana P adalah predikat "lebih dari 2" dan x adalah variabel. Pernyataan $P(x)$ disebut juga **fungsi proposisi** P di x. $P(x)$ bukan proposisi selama nilai x belum disubstitusikan. Begitu nilai x dimasukkan maka $P(x)$ mempunyai nilai kebenaran, dapat TRUE atau FALSE sehingga ia menjadi proposisi.

Contoh 2.1. Misalkan $P(x)$ adalah fungsi proposisi "x lebih dari 2". Tentukan nilai kebenaran $P(1)$ dan $P(3)$.

Penyelesaian. $P(1)$:"1 lebih dari 2" suatu proposisi bernilai FALSE. Sebaliknya, $P(3)$:"3 lebih dari 2" adalah suatu proposisi yang bernilai TRUE. ■

Pada contoh ini, fungsi proposisi mempunyai 1 variabel. Dalam banyak kasus, fungsi proposisi memuat beberapa variabel.

Contoh 2.2. Misalkan fungsi proposisi 2 variabel $Q(x, y)$ menyatakan "$x = y + 1$". Tentukan nilai kebenaran dari $Q(2, 1)$ dan $Q(1, 2)$.

Penyelesaian. $Q(2, 1)$:"$2 = 1+1$" suatu proposisi yang TRUE. Sedangakan $Q(1, 2)$:"$1 = 2 + 1$" suatu proposisi yang FALSE. ■

Interpretasi variabel pada fungsi proposisi dapat mempunyai makna yang bermacam-macam, seperti ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 2.3. Misalkan $A(c, n)$ menyatakan statemen "komputer c terhubung pada jaringan n". Di sini c menyatakan variabel untuk sebuah komputer, sedangkan n variabel untuk sebuah jaringan. Misalkan komputer M1 terhubung dengan jaringan kampus1, tetapi tidak terhubung dengan jaringan kampus2 maka diperoleh A(M1,kampus1) bernilai TRUE, sedangkan A(M1,kampus2) bernilai FALSE. ■

Secara umum, pernyataan yang memuat n variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ disajikan dalam bentuk $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Pernyataan yang berbentuk $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ adalah nilai fungsi proposisi P di pasangan $n - tuple$ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Permasalahan dalam fungsi proposisi adalah mengidentifikasi himpunan bagian dari semesta pembicaraan Ω dimana $P(x)$ bernilai TRUE atau FALSE. Ada beberapa kemungkinan

- $P(x)$ bernilai TRUE untuk setiap $x \in \Omega$.
- $P(x)$ bernilai TRUE hanya untuk sebagian $x \in \Omega$.
- $P(x)$ bernilai FALSE untuk setiap $x \in \Omega$.

Cara mengkuantifikasi suatu proposisi pada semesta pembicaraan adalah dengan menggunakan kuantor. Ada dua macam kuantor yaitu **kuantor universa**l dan kuantor eksistensial.

2.2 Kuantor universal dan eksistensial

Kalimat-kalimat yang memuat kata "semua", "setiap", "beberapa", "tak satupun", "paling sedikit...", "paling banyak...", dan lain-lain merupakan bentuk kuantifikasi.

Definisi 2.1. Dua cara untuk mengkuantifikasi kebenaran fungsi proposisi pada domain atau semesta pembicaraan, yaitu

1. Kuantifikasi universal, yaitu proposisi yang berbunyi "$P(x)$ untuk semua x dalam semesta pembicaraan Ω" atau "untuk semua x dalam semesta pembicaraan Ω berlaku $P(x)$", ditulis $\forall x \in \Omega, P(x)$. Bila domain Ω sudah ter-

pahami dengan baik maka cukup ditulis $\forall x$, $P(x)$. Notasi $\forall$ disebut **kuantor universal**.

2. Kuantifikasi eksistensial, yaitu proposisi yang berbunyi "$P(x)$ untuk suatu x dalam semesta pembicaraan Ω" atau "ada x dalam semesta pembicaraan Ω yang berlaku $P(x)$", ditulis $\exists x \in \Omega$, $P(x)$. Bila domain Ω sudah terpahami dengan baik maka cukup ditulis $\exists x$, $P(x)$. Notasi $\exists$ disebut **kuantor eksistensial**.

Kapan kedua kuantor ini bernilai benar dan kapan ia bernilai salah, diberikan sebagai berikut

- Pernyataan $\forall x$, $P(x)$ bernilai TRUE jika $P(x)$ TRUE untuk setiap $x \in \Omega$, dan bernilai FALSE jika ada $x \in \Omega$ yang membuat $P(x)$ FALSE.
- Pernyataan $\exists x$, $P(x)$ bernilai TRUE jika ada $x \in \Omega$ yang membuat $P(x)$ TRUE, dan bernilai FALSE jika $P(x)$ FALSE untuk setiap $x \in \Omega$.

Contoh 2.4. Misalkan domain adalah himpunan semua bilangan real. Tentukan nilai kebenaran kuantifikasi berikut !

1. $\forall x$, $P(x)$ dimana $P(x)$: "$x + 1 > x$".
2. $\forall x\,(x^2 \geq x)$.
3. $\exists x\, Q(x)$ dimana $Q(x)$: "$x^2 = x$".
4. $\exists x\,(x = x + 1)$.

Penyelesaian. Untuk pernyataan 1: karena berlaku $1 > 0$ maka untuk setiap x bilangan real selalu berlaku

$$1 + x > 0 + x \leftrightarrow 1 + x > x,$$

sehingga disimpulkan kuantifikasi ini bernilai TRUE. Perhatikan pernyataan 2, pertidaksamaan ini diselesaikan sebagai berikut

$$x^2 \geq x \leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \leftrightarrow x(x-1) \geq 0, \text{ dst...}$$

sehingga diperoleh himpunan penyelesaian $\{x|\, x \leq 0 \vee x \geq 1\}$. Mahasiswa yang belum bisa menyelesaiakan pertidaksamaan ini, lihat lagi pelajaran SLTA. Jadi dengan mengambil, misalnya $x = \frac{1}{2}$ maka diperoleh pernyataan $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$, suatu fakta yang FALSE. Jadi kuantifikasi ini bernilai FALSE. Untuk pernyataan 3: coba persamaan ini diselesaikan, hasilnya $x = 0, 1$. Karena ada x yang membuat persamaan benar maka kuantifikasi ini bernilai TRUE. Untuk pernyataan 4, silahkan coba sendiri. ■

Dalam kasus domain Ω berupa himpunan diskrit, katakan $\Omega := \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ maka berlaku

1. $\forall x \in \Omega, P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$.
2. $\exists x \in \Omega, P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$.

Contoh 2.5. Misalkan Ω himpunan semua bilangan bulat positif yang tidak melebih 4 dan $P(x)$ adalah pernyataan "$x^2 < 10$". Tentukan nilai kebenaran kuantifikasi berikut

1. $\forall x \in \Omega, P(x)$.
2. $\exists x \in \Omega, P(x)$

Penyelasaian. Kita mempunyai $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$. Dapat diperiksa bahwa $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ semuanya TRUE, sedangkan $P(4)$ FALSE. Karena $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_n)$ bernilai FALSE maka $\forall x \in \Omega, P(x)$ juga bernilai FALSE. Bagaimana dengan pernyataan $\exists x \in \Omega, P(x)$, coba selesaikan sendiri. ■

2.3 Negasi kalimat berkuantor

Diperhatikan pernyataan berikut

"Setiap mahasiswa dalam kelas ini mengambil kuliah kalkulus 1".

Pernyataan ini dapat diformulasikan sebagai bentuk kuantifikasi unversal, yaitu

$$\forall x,\, P(x)$$

dimana $P(x)$ pernyatan "x mengambil kuliah kalkulus 1". Negasi atau ingkaran pernyataan ini adalah "**tidaklah benar** bahwa semua mahasiswa dalam kelas ini mengambil kuliah kakulus 1". Ini ekuivalen dengan pernyataan "**ada** mahasiswa dalam kelas ini yang **tidak** mengambil kuliah kalkulus 1". Dalam bentuk simbolnya, negasi ini dapat disajikan sebagai berikut

$$\exists x, \neg P(x).$$

Contoh ini memberikan ilustrasi bahwa

$$\neg\left(\forall x,\ P(x)\right) \equiv \exists x, \neg P(x).$$

Sebaliknya pernyataan "ada mahasiswa dalam kelas ini yang mengambil kuliah kalkulus 1" bila diingkari memberikan pernyataan "**tidak** ada mahasiswa dalam kelas ini yang mengambil kuliah kalkulus" atau ekuivalen dengan pernyataan "**semua** mahasiswa dalam kelas ini **tidak ada** yang mengambil kuliah kalkulus". Dengan demikian diperoleh negasi berikut

$$\neg\left(\exists x, P(x)\right) \equiv \forall x, \neg P(x).$$

Dalam kasus domain diskrit$\Omega := \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ maka dengan penjelasan bagian sebelumnya dan hukum De Morgan, diperoleh

$$\neg\left(\forall x, P(x)\right) \equiv \neg\left(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)\right) \equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n).$$

Dengan argumen yang sama, diperoleh juga

$$\neg\left(\exists x, P(x)\right) \equiv \neg\left(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)\right) \equiv \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n).$$

Nilai kebenaran negasi kuantifikasi selalu bertolak belakang dengan nilai kebenaran kuantifikasi asli.

- Pernyataan $\neg\exists x, P(x)$, ekuivalen dengan $\forall x, \neg P(x)$: bernilai TRUE jika setiap x, pernyataan $P(x)$ FALSE; dan bernilai FALSE jika ada x yang membuat $P(x)$

TRUE.

- Pernyataan $\neg\forall x, P(x)$, ekuivalen dengan $\exists x, \neg P(x)$: bernilai TRUE jika ada x yang membuat $P(x)$ FALSE; dan bernilai FALSE jika $P(x)$ TRUE untuk setiap x.

Contoh 2.6. Tentukan negasi pernyataan berikut !

1. $\forall x, \left(x^2 \geq x\right)$.
2. $\exists x, \left(x^2 = 2\right)$.

Penyelesaian. Dengan menggunakan aturan pada penjelasan sebelumnya, diperoleh $\neg\forall x, \left(x^2 \geq x\right)$ adalah $\exists x, \left(x^2 < x\right)$, dan $\neg\exists x, \left(x^2 = 2\right)$ adalah $\forall x, \left(x^2 \neq 2\right)$. Coba cek nilai kebenarannya !

Contoh 2.7. Nyatakan kalimat berikut dengan menggunakan predikat, kuantor dan konektivitas logika!

1. Setiap mahasiswa dalam kelas ini sudah pernah belajar kalkulus.
2. Sebagian mahasiswa dalam kelas ini pernah mengunjungi Singapura.
3. Tak satupun orang dalam kelas ini yang sempurna.
4. Ada orang di kelas ini yang tidak bisa berenang.

2.4 Kuantor bersusun dan urutannya

Bila beberapa kuantor diterapkan bersamaan terhadap suatu proposisi maka nilai kebenaran kuantifikasi tersebut sangat bergantung tidak hanya pada jenis kunator yang digunakan tetapi pada urutan kuantor tersebut. Terkadang kuantifikasi ini sangat sulit untuk dipahami. Sebagai ilustrasi, diperhatikan contoh berikut

Contoh 2.8. Misalkan semesta pembicaraan adalah semua bilangan real. Diberikan dua kuantifikasi berikut

1. $\forall x \exists y, (x + y = 0)$,
2. $\exists x \forall y, (x + y = 0)$

Analisalah kebenaran masing-masing kuantifikasi tersebut.

Penyelesaian. Misalkan $P(x, y)$: "$x + y = 0$". Diperhatikan untuk kuantifikasi pertama, jika diberikan sebarang x selalu terdapat y (dalam hal ini $y = -x$) sehingga berlaku $x + y = 0$. Jadi setiap x kita selalu dapat menemukan x yang memenuhi $P(x)$. Disimpulkan bahwa kuantifikasi ini TRUE. Tetapi pada kuantifikasi kedua, misalkan ada x yang memenhui, katakan x_0. Maka untuk setiap y belum tentu berlaku $x_0 + y = 0$. Ilustrasi untuk $y_0 \neq -x_0$ maka $P(x_0, y_0)$ salah, sehingga kuantifikasi ini bernilai FALSE. ■

Berdasarkan contoh ini maka jelas bahwa urutan kuantor mempengaruhi nilai kebenaran kuantifikasi. Tetapi jika jenis kuantornya satu tipe maka ia akan bersifat komutatif.

Contoh 2.9. Misalkan semesta pembicaraan berupa himpunan semua bilangan real, diberikan kuantifikasi berikut

$$\forall x \forall y, ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0)).$$

Terjemahkan kuantifikasi ini ke dalam bahasa sehari-hari, tentukan nilai kebenarannya.

Penyelesaian. Pernyataan ini mengatakan bahwa setiap bilangan real x dan y, jika x positif dan y negatif maka perkaliannnya xy negatif. Berdasarkan sifat dasar operasi bilangan real maka disimpulkan kuantifikasi ini bernilai TRUE. Dalam kuantifikasi ini, urutan $\forall x \forall y$ dan $\forall y \forall x$ tidak mempengaruhi nilai kebenaran. ■

Contoh 2.10. Misalkan fungsi proposisi $C(x)$ adalah "x mempunyai komputer" dan $F(x, y)$ mengatakan "x dan y berteman". Bila semesta pembicaraan kita adalah semua mahasiswa di kelas ini, terjemahkan ke dalam bahasa sehari-hari maksud kuantifikasi berikut

$$\forall x\,(C(x) \vee \exists y,\,(C(y) \wedge F(x,y)))\,.$$

Penyelesaian. Karena x, y adalah variabel yang menyatakan siswa maka kuantifikasi ini dapat dinyatakan sebagai berikut: setiap mahasiswa x di kelas ini, x mempunyai komputer, atau ada mahasiswa y dimana y mempunyai komputer dan temannya mahasiswa x. Dalam bahasa sederhananya, setiap mahasiswa mempunyai komputer atau ada temannya yang mempunyai komputer. ■

Coba kalian analisa maksud kuantifikasi $\forall x\,(C(x) \oplus \exists y,\,(C(y) \wedge F(x,y)))$, dan bandingkan dengan kuantifikasi pada contoh sebelumnya.

Contoh 2.11. Dengan semesta pembicaraan yang sama seperti contoh sebelumnya dan $F(x,y)$ mengatakan "x dan y berteman", terjemahkan dalam bahasa sehari-hari kuantifikasi berikut

$$\exists x \forall y \forall z\,((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z))\,.$$

Penyelesaian. Ada mahasiswa x yang bersifat sebagai berikut: setiap mahasiswa y dan setiap mahasiswa z, jika x berteman dengan y dan berteman dengan z dimana y dan z dua mahasiswa yang berlainan maka y dan z tidak berteman. Dengan kata lain, jika ada dua orang berlainan yang berteman dengan x maka keduanya tidak berteman. Dalam hal ini x berperan sebagai separator (pemisah). ■

Sebaliknya, kita perhatikan contoh translasi dari bahasa sehari-hari ke simbol logika.

Contoh 2.12. Ubahlah pernyataan "Perkalian dua bilangan positif sebarang adalah positif."

Penyelesaian. Kalimat ini dapat dinyatakan dalam bentuk "untuk setiap dua bilangan positif, perkaliannya adalah postif". Misalkan x dan y menyatakan variabel untuk bilangan real sebagai semesta pembicaraan maka kalimat di atas dapat ditulis dalam bentuk kuantifikasi berikut :

$$\forall x \forall y\,((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (xy > 0))\,.$$

Contoh 2.13. Ubahlah pernyataan "Setiap orang mempunyai tepat satu telepon genggam".

Penyelesaian. Di sini kita mempunyai dua variabel, x untuk menyatakan orang dan y untuk menyatakan telepon genggam. Fungsi proposisi yang bersesuaian didefinisikan sebagai $B(x,y)$:"x memiliki y" atau "y adalah telepon genggam milik x". Pernyataan "x mempunyai tepat satu telepon genggam" dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\exists y \left(B(x,y) \wedge \forall z(z \neq y) \to \neg B(x,z)\right).$$

Kalimat ini dibaca "ada y sehingga jika x memiliki y dan setiap z yang tidak sama dengan y maka x tidak memiliki y. Karena berlaku untuk setiap x maka kalimat yang dimaksud dalam soal ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\forall x \exists y \left(B(x,y) \wedge \forall z(z \neq y) \to \neg B(x,z)\right). \quad \blacksquare$$

Notasi khusus yang biasa juga digunakan untuk menyatakan terdapat tepat satu adalah $\exists!$.

Nilai kebenaran kuantifikasi dua variabel

1. $\forall x \forall y$, $P(x,y)$ bernilai **benar** jika ia benar untuk setiap pasangan x dan y, dan bernilai **salah** jika ada pasangan (x_0, y_0) yang membuat $P(x_0, y_0)$ salah.
2. $\forall x \exists y$, $P(x,y)$ bernilai **benar** jika setiap x terdapat y_0 sehingga $P(x, y_0)$ benar, dan bernilai **salah** jika terdapat x_0 sehingga $P(x_0, y)$ benar untuk setiap y.
3. $\exists x \forall y$, $P(x,y)$ bernilai **benar** jika ada x_0 sehingga $P(x_0, y)$ bernilai benar untuk setiap y, dan bernilai **salah** jika untuk setiap x, terdapat y_0 sehingga $P(x, y_0)$ salah.
4. $\exists x \exists y$, $P(x,y)$ bernilai benar jika ada pasangan (x_0, y_0) sehingga $P(x_0, y_0)$ benar.

Contoh 2.14. Misalkan semesta pembicaraan adalah semua bilangan real. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut

1. $\forall x \exists y, \left(x = y^2\right)$.
2. $\exists x \forall y, \, (xy = 0)$.
3. $\exists x \exists y, (x + y = 2 \wedge 2x + 2y = 1)$.
4. $\forall x \exists y, \, (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$.
5. $\forall x \forall y \exists z, \left(z = \frac{x+y}{2}\right)$.

3 ATURAN INFERENSI

Aturan inferensi adalah aturan yag digunakan untuk menjustifikasi atau pembenaran langkah-langkah dalam pengambilan kesimpulan. Argumen adalah suatu proses inferensi. Secara umum, argumen berbentuk sebagai berikut

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

dimana $p_1, p_2, \cdots, p_n$ disebut premis atau **hipotesis** dan q disebut **kesimpulan**. Notasi $\therefore$ dibaca "jadi". Proses inferensi dapat pula disajikan dalam bentuk implikasi sebagai berikut

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q \tag{3.1}$$

yaitu kesimpulan q diturunkan dari hipotesis $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Suatu argumen dikatakan **valid** atau sahih jika implikasi (3.1) bernilai TRUE. Jadi dalam suatu argumen yang valid, jika semua hipotesisnya $p_1, p_2, \cdots, p_n$ benar maka ia akan menghasilkan kesimpulan q yang juga benar. Tetapi dalam argumen yang valid dapat saja menghasilkan kesimpulan yang salah jika ada diantara hipotesisnya salah.

3.1 Bentuk inferensi dasar

3.1.1 Modus ponens

Modus ponens didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \to q)) \to q$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Argumen ini dapat pula dipahami sebagai berikut: bila $p \to q$ benar dan p benar maka haruslah q juga benar, sebab bila q salah maka terlahirlah suatu kontradiksi.

Contoh 3.1. Misalkan implikasi "jika belanja anda lebih dari 100 ribu maka anda mendapat diskon 10%" dan hipotesisnya "belanja anda 125 ribu". Maka dengan modus ponens, disimpulkan bahwa "anda mendapat diskon 10%". ■

Contoh berikut ini menunjukkan kasus dimana kesimpulannya salah diperoleh dari argumen yang valid.

Contoh 3.2. Diperhatikan argumen berikut, selidikilah nilai kebenaran kesimpulannya, jelasakan.

> "Jika $\sqrt{2} > \frac{1}{2}$ maka $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$; kita tahu bahwa $\sqrt{2} > \frac{1}{2}$; konsekuensinya $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$."

Penyelesaian. Argumen ini berbentuk modus ponens dimana p adalah pernyataan $\sqrt{2} > \frac{1}{2}$ dan q adalah pernyataan $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Tetapi kesimpulannya $2 > \frac{9}{4}$ salah karena seharusnya $2 < \frac{9}{4}$. Argumen ini valid, tetapi hipotesis $p \to q$ salah karena berbentuk $F \to T$. ■

3.1.2 Modus tollens

Modus tollens didasarkan pada tautologi $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Argumen ini dapat pula dipahami sebagai berikut: bila implikasi $p \rightarrow q$ benar dan diketahui $\neg q$ benar (atau q salah) maka haruslah p salah (atau $\neg p$ benar). Bila tidak maka menimbulkan kontradiksi.

3.1.3 Silogisme hipotetis

Silogisme hipotetis didasarkan pada tautologi $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Silogisme ini dapat diilustrasikan pula sebagai sifat transitif, bila kedua implikasi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow r$ benar maka dapat dibentuk implikasi langsung $p \rightarrow r$.

3.1.4 Silogisme disjungsi

Silogisme disjungsi didasarkan pada tautologi $(p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Argumen ini dapat pula dipahami sebagai berikut: bila implikasi $p \vee q$ benar dan p salah maka haruslah q benar.

3.1.5 Resolusi

Resolusi didasarkan pada tautologi $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow q \vee r$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

Argumen ini dapat pula dipahami sebagai berikut: bila implikasi $p \vee q$ benar dan $\neg p \vee r$ diketahui benar maka kita dapat menyimpulkan bahwa p mesti diabaikan karena ia akan mempunyai nilai kebenaran yang berbeda pada premis pertama dan premis kedua. Oleh karena itu agar kedua premis tetap benar maka haruslah $q \vee r$ benar. Coba analisa pakai tabel!.

3.1.6 Adisi

Argumen ini didasarkan pada tautologi $p \rightarrow (p \vee q)$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

Argumen ini dapat dijelaskan sebagai berikut: jika pada sebuah pernyataan yang bernilai benar ditambahkan pernyataan lain dengan menggunakan operator disjungsi maka terbentuk pernyataan baru yang tetap benar.

3.1.7 Simplifikasi

Argumen ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \rightarrow p$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Argumen ini dapat dijelaskan sebagai berikut: jika pada sebuah pernyataan berbentuk konjugsi bernilai benar maka dapat disimpulkan salah satu pernyataan yang membentuknya pasti benar.

3.1.8 Konjungsi

Argumen ini didasarkan pada tautologi $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$, dan dapat ditulis dalam bentuk argumen sebagai berikut

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Argumen ini dapat dijelaskan sebagai berikut: jika dua pernyataan bernilai benar maka konjungsinya bernilai benar. Fakta ini sudah dijelaskan pada materi konektivitas.

Contoh 3.3. Katakan aturan inferensi apa yang digunakan pada argumen berikut : "Saat ini dibawah titik beku. Jadi, saat ini dibawah titik beku atau saat ini hujan."

Penyelesaian. Misalkan p pernyataan "saat ini dibawah titik beku" dan q pernyataan "saat ini hujan" maka argumen ini adalah berupa adisi dengan bentuk

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

■

Contoh 3.4. Katakan aturan inferensi apa yang digunakan pada argumen berikut : Jika hari ini hujan maka kita tidak dapat makan bebakaran hari ini. Jika kita tidak dapat makan bebakaran hari ini maka besok kita akan makan bebakaran. Jadi, jika hari ini hujuan, maka kita makan bebakaran besok".

Penyelesaian. Argumen ini berbentuk silogisme hipotetik

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Selanjutnya, coba tentukan pernyataan p, q dan r. ■

Contoh 3.5. Tunjukkan bahwa hipotesis "sore ini tidak cerah dan lebih dingin dari kemarin", "kita akan berenang hanya bila hari cerah," "jika kita tidak pergi berenang, maka kita akan naik perahu, "jika kita naik perahu maka kita akan tiba di rumah magrib," menghasilkan kesimpulan "kita akan tiba di rumah magrib."

Penyelesaian. Didefinisikan sejumlah proposisi berikut

p : sore ini cerah
q : saat ini lebih dingin dari kemarin
r : kita akan pergi berenang
s : kita akan naik perahu
t : kita akan tiba di rumah magrib

Argumen di atas dapat dijabarkan sebagai berikut

Langkah	Alasan
1. $\neg p \wedge q$	hipotesis (diketahui)
2. $\neg p$	simplifikasi
3. $r \to p$	hipotesis
4. $\neg r$	modus tollens langkah 2 dan 3
5. $\neg r \to s$	hipotesis
6. s	modus ponens langkah 4 dan 5
7. $s \to t$	hipotesis
8. t	modus ponens langkah 6 dan 7

Bukti selesai. ■

Contoh 3.6. Berikut argumen membukti bahwa "$1 = 2$". Misalkan diketahui a dan b dua bilangan positif yang sama.

Langkah	**Alasan dan keterangan**
1. $a = b$	diketahui
2. $a^2 = ab$	kedua ruas pada (1) dikalikan dengan a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	kedua ruas (2) dikurangi oleh b^2
4. $(a + b)(a - b) = (a - b)b$	kedua ruas (3) difaktorkan
5. $a + b = b$	kedua ruas (4) dibagi oleh $(a - b)$
6. $2b = b$	substitusi a dengan b (diketahui)
7. $2 = 1$	kedua ruas dibagi dengan b

Selidikilah pada langkah berapa terjadi kesalahan.

Penyelesaian. Sepintas lalu tidak ada yang salah dengan langkah-langkah pembuktian di atas. Argumennya valid, tetapi kesimpulannya salah. Jadi ada premis atau langkah yang salah. Ingat dalam matematika membagi dengan nol tidak diperbolehkan karena hasilnya tidak terdefinisi. Pada pembuktian di atas hanya langkah 5 yang bermasalah yaitu membagi dengan bilangan yang bernilai nol. ■

Contoh 3.7. Selidikilah apakah argumen berikut valid ?
Jika anda mengerjakan semua soal dalam buku ini, maka anda akan belajar matematika diskrit. Anda belajar matematika diskrit. Jadi, anda sudah mengerjakan semua soal dalam buku ini.

Penyelesaian. Misalkan p : anda mengerjakan semua soal dalam buku ini, q : anda akan belajar matematika diskrit. Maka argumen ini berbentuk

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Argumen ini tidak valid karena anda dapat saja belajar matematika diskrit walaupun anda tidak menyelesaikan semua soal. Artinya, kalau diketahui q benar maka implikasi $p \to q$ tetap benar walaupun p salah. ■

3.2 Inferensi untuk pernyataan kuantifikasi

Didasarkan pada dua macam bentuk kuantifikasi maka terdapat 4 aturan inferensi untuk kuantifikasi. Keempat aturan ini banyak digunakan dalam argumen matematika, yaitu

1. **Instantisasi universal**, yaitu aturan yang digunakan untuk menyimpulkan $P(c)$ benar, dimana c anggota khusus semesta pembicaraan pada premis $\forall x,\ P(x)$. Sebagai contoh, jika diketahui bahwa "semua wanita bijaksana" dan Lisa adalah seorang wanita maka disimpulkan bahwa "Lisa bijaksana".

2. **Generalisasi universal**, yaitu aturan yang digunakan untuk menyimpulkan bahwa $\forall x,\ P(x)$ benar jika $P(c)$ benar untuk sebarang c dalam semesta pembicaraan. Aturan ini sering digunakan secara implisit dalam banyak pembuktian matematika.

3. **Instantisasi eksistensial**, yaitu aturan yang membolehkan kita menyimpulkan terdapat sebuah elemen c di dalam semesta jika diketahui $\exists x,\ P(x)$ benar.

4. **Generalisasi eksistensial**, yaitu aturan untuk menyimpulkan bahwa $\exists x,\ P(x)$ benar jika diketahui ada elemen tertentu c dalam semesta dimana $P(c)$ benar.

Keempat aturan inferensi ini dirangkum pada tabel berikut.

Aturan inferensi	**Nama**
$\dfrac{\forall x, P(x)}{\therefore P(c)}$	Instantisasi universal
$\dfrac{P(c) \text{ untuk sebarang } c}{\therefore \forall x, P(x)}$	Generalisasi universal
$\dfrac{\exists x, P(x)}{\therefore P(c) \text{ untuk suatu } c}$	Instantisasi eksistensial
$\dfrac{P(c) \text{ untuk suatu c}}{\therefore \exists x, P(x)}$	Generalisasi eksistensial

Table 3.1: Aturan inferensi untuk kuantifikasi

Contoh 3.8. Tunjukkan bahwa premis-premis berikut

1. Seorang mahasiswa dalam kelas ini belum membaca buku Pak Julan,
2. Setiap orang dalam kelas ini lulus pada ujian pertama

menghasilkan kesimpulan
"Seseorang yang lulus pada ujian pertama belum membaca buku Pak Julan.

Penyelesaian. Misalkan $C(x)$: "x di dalam kelas ini", $B(x)$: "x sudah membaca buku Pak Julan" dan $P(x)$: "x lulus pada ujian pertama". Maka premis di atas berbentuk sebagai berikut

1. $\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$
2. $\forall x\,(C(x) \to P(x))$

dan kesimpulannya adalah $\exists x\,(P(x) \wedge \neg B(x))$.

Tahap	**Keterangan dan alasan**
1. $\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$	premis 1
2. $C(a) \wedge \neg B(a)$ untuk suatu a	instantisasi eksistensial
3. $C(a)$	aturan simplifikasi
4. $\forall x\,(C(x) \to P(x))$	premis 2
5. $C(a) \to P(a)$ untuk suatu a	instantisasi universal
6. $P(a)$	modus ponens dari (3) dan (4)
7. $\neg B(a)$	simplifikasi dari (2)
8. $P(a) \wedge \neg B(a)$	konjungsi dari (6) dan (7)
9. $\exists x\,(P(x) \wedge \neg B(x))$	generalisasi eksistensial

TUGAS-TUGAS

1. Exercises hal 51 - 56 (ada 53 soal) untuk kuliah minggu lalu, 14 Oktober 2011
2. Excercises hal 73-74 (No. 1 s.d. 16) untuk materi kuliah minggu ini, 21 Oktober 2011.

4 METODA PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

Di dalam matematika, bukti (*proof*) adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Argumen ini melibatkan premis pernyataan itu sendiri, pernyataan lain yang sudah berlaku seperti teorema, definisi, atau bahkan berasal dari postulat atau aksioma dimana sistem matematika tersebut berasal. Yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya. Jadi kebenaran semua premis pada setiap deduksi sudah dibuktikan atau diberikan sebagai asumsi. Sebelum masuk pada metoda pembuktian, kita pahami dulu beberapa bentuk pernyataan dalam matematika yang sering muncul.

4.1 Jenis pernyataan dalam matematika

Beberapa pernyataan yang sering muncul dalam matematika adalah sebagai berikut:

Definisi (Definition)

Definisi adalah kesepakatan bersama mengenai pengertian atau batasan suatu istilah.

Contoh 4.1. [Definisi bilangan prima] **Bilangan prima** adalah bilangan lebih besar dari 1 yang tidak mempunyai faktor selain dari 1 dan dirinya sendiri.

Teorema (Theorem)

Teorema adalah pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya. Teorema dapat berupa kalimat berkuantor, pernyataan bersyarat dengan satu atau beberapa premis dan satu konklusi.

Contoh 4.2. [Teorema Pythagoras] Pada suatu segitiga siku-siku berlaku kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-siku.

Proposisi (Proposition)

Proposisi merupakan teorema kecil dimana tingkat signifikansinya lebih rendah dari Teorema.

Fakta (Fact)

Fakta kadang digunakan untuk menyatakan Teorema atau Proposisi tetapi kebenarannya dapat dipahami langsung dan mudah.

Contoh 4.3. [Fakta segitiga] Dalam sebarang segitiga, panjang jumlah kedua sisinya lebih dari panjang sisi ketiganya.

Bukti (Proof)

Bukti adalah penalaran (argument) valid yang digunakan untuk menunjukkan kebenaran suatu Teorema.

Aksioma/Postulat (Axiom/Postulate)

Aksioma atau postulat pernyataan yang menjadi asumsi dasar dalam penyusunan suatu konsep dalam matematika. Aksioma biasa digunakan untuk membangun definisi, atau untuk membuktikan Teorema.

Contoh 4.4. [Aksioma bilangan real] Pada bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan dua operasi binair $(+, \cdot)$ dan berlaku sifat-sifat

- $a + b = b + a$ dan $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ (komutatif).
- Ada $0 \in \mathbb{R}$ dan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku $a + 0 = 0 + a = a$ (elemen nol), dan $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (elemen satuan)
- dst

Lemma (Lemma)

Lemma adalah teorema "kecil" yang biasanya digunakan untuk membuktikan Teorema.

Akibat (Corollary)

Akibat merupakan fakta yang diturunkan langsung dari Teorema dimana kebenarannya dapat dibuktikan dari Teorema langsung.

Dugaan atau kenjektur (Conjecture)

Konjektur merupakan pernyataan yang diduga benar berdasarkan data empiris (*evidence*), argumen heuristik, atau intuisi para ahli; tetapi belum berdasarkan argumen valid. Bila konjektur dapat dibuktikan dengan argmen yang valid maka ia berubah menjadi Teorema atau proposisi.

4.2 Mengapa perlu membuktikan

Sebelumnya mari kita simak kata-kata bijak berikut :

> "*It is with logic that one proves, it is with intuition that one invents*" (Henri Poincaré).

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif mengandalkan logika dalam meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan. Faktor intuisi dan pola berpikir induktif banyak berperan pada proses awal dalam merumuskan suatu konjektur (*conjecture*) yaitu dugaan awal untuk memperoleh proposisi dalam matematika.

Proses penemuan dalam matematika dimulai dengan pencarian pola dan struktur, contoh kasus dan objek matematika lainnya. Selanjutnya, semua informasi dan fakta yang terkumpul secara individual ini dibangun suatu koherensi untuk kemudian disusun suatu konjektur. Setelah konjektur dapat dibuktikan kebenarannya maka selanjutnya ia menjadi suatu teorema.

Pernyataan-pernyataan matematika seperti definisi, teorema dan pernyataan lainnya pada umumnya berbentuk kalimat logika, dapat berupa implikasi, biimplikasi, negasi, atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti `and`, `or`, `not`, `xor` juga sering termuat dalam suatu pernyataan matematika. Jadi membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat logika.

Materi logika sudah diberikan sejak di bangku SLTA. Namun selama ini, sebagian siswa atau guru masih menganggap logika sebagai materi hapalan, khususnya menghapal tabel kebenaran. Belum tahu mengapa dan untuk apa logika dipelajari. Tanpa menguasai logika maka sulit untuk terbentuknya apa yang disebut dengan *logically thinking*. Apa yang terbentuk pada siswa, mahasiswa, guru atau bahkan dosen selama ini lebih dominan pada *algorithm thinking* atau berpikir secara algoritma. Cara berpikir algoritmis dalam belajar matematika ini lebih ditekankan pada memahami langkah-langkah dalam menyelesaikan suatu soal, tanpa melihat lebih dalam mengapa langkah-langkah tersebut dapat dilakukan. Bila pendekatan ini mendominasi dalam pembelajaran matematika, misalnya di sekolah menengah maka akibatnya siswa akan menjadi "robot matematika". Mereka mampu dan cepat menyelesaikan soal yang mirip (*similar*) dengan contoh sebelumnya, tetapi tidak berkutik bilamana soal tersebut dimodifikasi sedikit, sehingga tidak tampak secara kasat mata kemiripannya dengan soal yang sudah ada, walaupun sesungguhnya materinya tetap sama.

Pada tahap awal, pekerjaan memahami bukti bukanlah sesuatu yang menarik karena lebih banyak bergelut dengan simbol dan pernyataan logika ketimbang berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai ciri matematika. Kenyataan inilah menjadikan salah satu alasan orang malas untuk memahami bukti dalam matematika. Alasan lainnya adalah pekerjaan membuktikan lebih sulit dan dianggap tidak penting oleh sebagian besar orang. Padahal banyak manfaat yang dapat diperoleh pada pengalaman membuktikan ini, salah satunya adalah melatih *logically thinking* dalam belajar matematika. Pada bab ini disajikan beberapa metoda pembuktian sederhana dengan menggunakan aturan-aturan logika dasar. Namun sebelumnya disajikan dulu beberapa motivasi mengapa orang perlu membuktikan kebenaran dalam matematika.

Dalam artikel *making mathematics* yang berjudul `Proof`, dapat diakses pada website http:/www2.edc.org/makingmath, dijelaskan secara rinci mengenai bukti dalam mate-matika yang meliputi *what is proof, why do we prove, what do we prove, dan how do we prove.* Menurut artikel tersebut, paling tidak terdapat enam motivasi mengapa orang membuktikan, yaitu *to establish a fact with certainty, to gain understanding, to communicate an idea to others, for the challenge, to create something beautiful, to construct a large mathematical theory. To establish a fact with certainty* merupakan motivasi paling dasar mengapa orang perlu membuktikan suatu pernyataan matematika, yaitu untuk meyakinkan bahwa apa yang selama ini dianggap benar adalah memang benar.

Tidak dapat dipungkiri selama ini banyak kebenaran fakta di dalam matematika hanya dipercaya begitu saja tanpa adanya kecurigaan terhadap kebenaran tersebut, tidak berusaha membuktikan sendiri, termasuk fakta-fakta yang sangat sederhana. Kita hanya menggunakan fakta tersebut karena sudah ada dalam buku (*it was in the text*), atau karena sudah pernah disampaikan oleh guru kita. Memang tidak semua fakta matematika yang dipelajari harus dipahami buktinya.

Suatu ilustrasi, pernahkah kita membuktikan bahwa $\sqrt{2}$, π dan e merupakan bilangan irrasional? Bila bilangan irrasional dapat dicirikan oleh tidak berulangnya angka-angka desimalnya maka bukti ini bersifat temporer. Misalkan seorang siswa dapat menunjukkan bahwa 100 digit angka pada bentuk desimal bilangan π tidak berulang maka siswa tersebut menyimpulkan bahwa π irrasional. Tapi begitu ada siswa lain yang dapat menunjukkan terdapatnya pola pengulangan, misalnya mulai dari digit ke- 150 maka klaim siswa pertama tadi gugur dan harus disimpulkan bahwa π rasional. Kesimpulan siswa pertama di atas didasarkan pada intuisi bukan didasarkan pada metoda pembuktian yang sahih. Banyak pembuktian yang tidak hanya membuktikan suatu fakta tetapi juga memberikan penjelasan tentang fakta tersebut. Disinilah, pembuktian teorema berfungsi untuk mendapatkan pemahaman (*to gain understanding*). Seorang pemenang medali "field", Pierre Deligne meyatakan bahwa

> "*I would be grateful if anyone who has understood this demonstration would explain it to me.*"

Pernyataan ini mengandung makna bahwa bilamana seseorang dapat menjelaskan kembali apa yang sudah dijabarkan oleh Pierre Deligne maka dapat dipastikan bahwa orang tersebut telah memahaminya, mungkin saja penjelasan yang telah disajikan oleh Pierre ada bagian-bagian yang belum jelas.

Terkadang, beberapa orang mempunyai pendirian sangat kuat bahwa suatu konjektur adalah benar. Keyakinan ini mungkin berasal dari penjelasan informal atau dari beberapa kasus yang ditemuinya. Bagi mereka tidak ada keraguan terhadap keyakinan itu, tapi belum tentu berlaku untuk orang dari kelompok lain. Disinilah bukti dapat dijadikan sarana untuk meyakinkan orang lain akan kebenaran suatu idea. Akan tetapi untuk menyusun bukti formal terhadap kebenaran suatu fakta tidaklah mudah. Mengikuti bukti yang sudah ditemukan dan disusun orang lain saja tidak mudah apalagi menyusun sendiri. Membuktikan merupakan tantangan sendiri para matematikawan, membuat penasaran dan begitu terselesaikan maka diperoleh kepuasan intelektual.

Ibarat seni, matematika itu indah. Ini paling tidak pendapat para matematikawan. Bagi orang awam keindahan matematika hanya terlihat dari pola dan struktur objek matematika, seperti bilangan, bangun geometri, simulasi matematika pada komputer. Namun bagi mereka yang sudah mencapai begawan matematika, keindahan sesungguhnya matematika (*the real beauty of mathematics*) terletak pada pola penalaran yang berupa interkoneksi argumen-argumen logis. Ini tercermin pada pembuktian teorema.

Keberhasilan memformulasikan satu konjektur, kemudian dapat membuktikannya maka satu masalah dalam matematika terselesaikan. Penelitian matematika pada level lanjutan menuntut dihasilkannya suatu teorema baru yang buktinya dapat diuji oleh orang lain. Berbeda dengan motto PERUM Pegadaian "mengatasi masalah tanpa masalah", maka dalam matematika setiap kali berhasil memecahkan suatu masalah maka akan muncul masalah baru, bahkan lebih banyak dan lebih menantang. Masalah-masalah baru ini biasanya muncul melalui langkah-langkah dalam pembuktian teorema baik langsung maupun tidak langsung. Mungkin motto pada PERUM Pegadaian bila diadaptasikan pada matematika berbunyi sebagai berikut: "memecahkan masalah, menimbulkan masalah baru". Masalah dalam matematika tidak bermakna negatif, tapi malah menambah kaya ilmu matematika itu sendiri.

4.3 Macam-macam pembuktian dalam matematika

Definisi memainkan peranan penting di dalam matematika. Topik-topik baru matematika selalu diawali dengan membangun definisi baru. Sebagai contoh, teori fungsi kompleks diawali dengan mendefinisikan bilangan imajiner i, yaitu $i^2 = -1$. Berangkat dari definisi dihasilkan sejumlah teorema beserta akibat-akibatnya. Teorema-teorema inilah yang perlu dibuktikan. Pada kasus sederhana, kadangkala teorema pada suatu buku ditetapkan sebagai definisi pada buku yang lain, begitu juga sebaliknya.

4.3.1 Bukti langsung

Bukti langsung ini biasanya diterapkan untuk membuktikan teorema yang berbentuk implikasi $p \to q$. Di sini p sebagai hipotesis digunakan sebagai fakta yang diketahui atau sebagai asumsi. Selanjutnya, dengan menggunakan p kita harus menunjukkan berlaku q. Secara logika pembuktian langsung ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa pernyataan $p \to q$ benar dimana diketahui p benar.

Contoh 4.5. Buktikan, jika x bilangan ganjil maka x^2 ganjil.

Bukti. Diketahui x ganjil, jadi dapat ditulis sebagai $x = 2n-1$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya,

$$x^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2\underbrace{(2n^2+2)}_{m} + 1 = 2m + 1.$$

Karena m merupakan bilangan bulat maka disimpulkan x^2 ganjil. ■

Dalam pembuktian ini digunakan fakta bahwa bilangan ganjil selalu berbentuk $2n-1$ untuk suatu bilangan bulat n.

4.3.2 Bukti taklangsung

Kita tahu bahwa nilai kebenaran suatu implikasi $p \to q$ ekuivalen dengan nilai kebenaran kontraposisinya $\neg q \to \neg p$. Jadi pekerjaan membuktikan kebenaran pernyataan implikasi dapat dilakukan melalui kontraposisinya. Inilah bukti taklangsung.

Contoh 4.6. Buktikan, jika x^2 bilangan ganjil maka x bilangan ganjil.

Bukti. Pernyataan ini sangat sulit dibuktikan secara langsung. Mari kita coba saja. Karena x^2 ganjil maka dapat ditulis $x^2 = 2m + 1$ untuk suatu bilangan asli m. Selanjutnya $x = \sqrt{2m+1}$ tidak dapat disimpulkan apakah ia ganjil atau tidak. Sehingga bukti langsung tidak dapat digunakan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah

"Jika x genap maka x^2 genap".

Selanjutnya diterapkan bukti langsung pada kontraposisinya. Diketahui x genap, jadi dapat ditulis $x = 2n$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya,

$$x^2 = (2n)^2 = 2\underbrace{(2n^2)}_{m} = 2m$$

yang merupakan bilangan genap. ■

4.3.3 Bukti kosong

Bila hipotesis p pada implikasi $p \to q$ sudah bernilai salah maka implikasi $p \to q$ selalu benar apapun nilai kebenaran q. Jadi jika kita dapat menunjukkan bahwa p salah maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \to q$. Inilah metoda bukti kosong.

Contoh 4.7. Di dalam teori himpunan kita mengenal definisi berikut :

> Diberikan dua himpunan A dan B. Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari B, ditulis $A \subset B$ jika pernyataan berikut dipenuhi : "jika $x \in A$ maka $x \in B$". Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika ia tidak mempunyai anggota.

Buktikan, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun.

Bukti. Misalkan $A = \emptyset$ suatu himpunan kosong dan B himpunan sebarang. Kita akan tunjukkan bahwa pernyataan "jika $x \in A$ maka $x \in B$" bernilai benar. Karena A himpunan kosong maka pernyataan p yaitu $x \in A$ selalu bernilai salah karena tidak mungkin ada x yang menjadi anggota himpunan kosong. Karena p salah maka terbuktilah kebenaran pernyataan "jika $x \in A$ maka $x \in B$", yaitu $A \subset B$. Karena B himpunan sebarang maka bukti selesai. ■

4.3.4 Bukti trivial

Bila pada implikasi $p \to q$, dapat ditunjukkan bahwa q benar maka implikasi ini selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari p. Jadi jika kita dapat menunjukkan bahwa q benar maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \to q$. Metoda ini disebut bukti trivial.

Contoh 4.8. Buktikan, jika $0 < x < 1$ maka $0 < \frac{x^2+1}{|x|+1}$.

Bukti. Karena pernyataan $q : 0 < \frac{|x|}{|x|+1}$ selalu benar untuk setiap x bilangan real termasuk untuk $x \in (0, 1)$ maka secara otomatis kebenaran pernyataan ini terbukti. ■

4.3.5 Bukti dengan kontradiksi

Metoda ini mempunyai keunikan tersendiri, tidak mudah diterima oleh orang awam. Dalam membuktikan kebenaran implikasi $p \to q$ kita berangkat dari diketahui p dan $\neg q$. Berangkat dari dua asumsi ini kita akan sampai pada suatu kontradiksi. Suatu kontradiksi terjadi bilamana ada satu atau lebih pernyataan yang bertentangan. Contoh pernyataan kontradiksi : "$1 = 2$", "$-1 < a < 0$ dan $0 < a < 1$", "m dan n dua bilangan bulat yang prima relatif, dan m dan n keduanya bilangan genap". Bila dalam langkah-langkah pembuktian menggunakan argumen yang valid, ditemukan suatu kontradiksi (pernyataan yang selalu bernilai salah) maka asumsi awal dipastikan salah sehingga harus disimpulkan sebaliknya. Prinsip pada metoda ini adalah, kebenaran suatu pernyataan diingkari dulu dengan pengandaian, ditemukan kontradiksi, disimpulkan pengandaian tersebut salah.

Contoh 4.9. Misalkan himpunan A didefinisikan sebagai interval setengah terbuka $A := [0, 1)$. Buktikan maksimum A tidak ada.

Bukti. Pernyataan ini dapat dinyatakan dalam bentuk implikasi berikut

"jika $A := [0, 1)$ maka maksimum A tidak ada."

Andaikan maksimum A **ada**, katakan p. Maka haruslah $0 < p < 1$, dan akibatnya $\frac{1}{2}p < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}(p + 1) < 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \\ &< \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(p + 1) < 1. \end{aligned}$$

Diambil $q := \frac{1}{2}(p + 1)$, diperoleh dua pernyataan berikut :

- p maksimum A, yaitu p anggota terbesar himpunan A dan
- ada $q \in A$, yaitu $q := \frac{1}{2}(p + 1)$ yang lebih besar dari p.

Kedua pernyataan ini kontradiktif, jadi pengandaian A mempunyai maksimum adalah salah, jadi haruslah tidak ada maksimum. ■

Bila dicermati ada kemiripan bukti dengan kontradiksi dan bukti dengan kontraposisi. Untuk menjelaskan perbedaan kedua metoda ini kita perhatikan struktur pada keduanya sebagai berikut :

- Pada metoda kontradiksi, kita mengasumsikan p dan $\neg q$, kemudian membuktikan adanya kontradiksi.
- Pada bukti dengan kontraposisi, kita mengasumsikan $\neg q$, lalu membuktikan $\neg p$.

Asumsi awal kedua metoda ini sama, pada metoda kontraposisi tujuan akhirnya sudah jelas yaitu membuktikan kebenaran $\neg p$, sedangkan pada metoda kontradiksi tujuan akhirnya menemukan kontradiksi. Khususnya, jika sudah sampai pada pernyataan $\neg p$ maka kontradiksi sudah ditemukan. Jadi metoda kontraposisi merupakan kasus khusus dari metoda kontraposisi.

4.4 Bukti ketunggalan

4.5 Bukti dengan contoh ingkaran

4.6 Bukti dua arah

4.7 Induksi matematika

5 DASAR-DASAR TEORI HIMPUNAN

5.1 Pengertian dasar himpunan

Himpunan digunakan untuk mengumpulkan objek atau benda secara bersamaan. Seringkali, objek tersebut mempunyai sifat yang sama atau mirip. Misalnya himpunan semua mahasiswa yang menyukai futsal, himpunan peralatan rumah tangga, dan lain-lain. Sesungguhnya himpunan tidak didefinisikan secara formal. Namun hanya didasarkan pada intuisi oleh Goerge Cantor tahun 1895, seperti diberikan sebagai berikut.

Definisi 5.1. Himpunan adalah koleksi takterurut objek-objek. Objek-objek ini disebut elemen atau anggota himpunan.

Permasalahan di sini adalah tidak ada batasan apa yang dimaksud objek. Pendefinisian melalui intuitif ini menimbulkan paradoks atau ketidakkonsistenan logika seperti yang dikemukan oleh Betrand Russel tahun 1902. Pada bagian selanjutnya kita akan bahas paradoks yang dimaksud.

Notasi

Himpunan biasanya disajikan dengan hurup kapital, misalnya $A, B, C, \cdots$. Kita menulis $a \in A$ untuk menyatakan bahwa objek a adalah elemen himpunan A. Untuk a bukan elemen himpunan A ditulis $a \notin A$. Penyajian himpunan biasanya menggunakan kurung kurawal "{ }". Notasi $\{a, b, c, d\}$ menyatakan himpunan yang anggotanya adalah a, b, c dan d.

Contoh 5.1. Berikut diberikan beberapa contoh himpunan

1. Himpunan V dari semua hurup vokal pada alpabet dapat ditulis $V = \{a, e, i, o, u\}$.
2. Himpunan E dari semua bilangan genap positif yang tidak lebih dari 10 ditulis $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
3. Himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari 100 adalah $F = \{1, 2, 3, \cdots, 99\}$. Notasi "..." digunakan untuk menyatakan "dan seterusnya mengikuti pola sebelumnya".

Cara penyajian himpunan di atas adalah dengan menulis elemennya satu per satu atau cara tabulasi. Cara lain untuk menyajikan himpunan adalah dengan menggunakan pembangun himpunan (*set builder*), yaitu dengan menulis sifat-sifatnya.

Contoh 5.2. Berikut beberapa contoh himpunan yang disajikan dengan menggunakan pembangun himpunan.

1. Himpunan semua bilangan genap positif yang tidak lebih dari 10 dapat ditulis sebagai
$$E = \{x \,|\, x \text{ genap tidak melebihi } 10\},$$
atau lebih spesifik $E = \{x \in Z_+ | \, x \leq 10\}$ dimana notasi Z_+ menyatakan bilangan bulat positif.
2. Himpunan semua bilangan rasional positif dapat ditulis sebagai berikut
$$Q_+ = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in Z_+\right\}.$$
3. Himpunan semua bilangan real yang terletak diantara 0 dan 1 ditulis
$$F = \{x \,|\, 0 < x < 1\} \text{ atau dalam notasi interval } F = (0, 1).$$

Notasi "|" dalam kurung kurawal biasanya dibaca "dimana" sehingga himpunan $F = \{x \,|\, 0 < x < 1\}$ dibaca himpunan semua x dimana x lebih dari 0 dan kurang dari 1. Kadangkala notasi "|" digantikan oleh notasi titik dua ":", pengertiannya sama. Berikut diberikan himpunan bilangan yang sering digunakan dalam matematika.

1. Himpunan bilangan real ditulis $\mathbb{R}$.
2. Himpunan bilangan bulat, $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
3. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
4. Himpunan bilangan bulat positif dinyatakan dengan $\mathbb{Z}_+$, dan himpunan bilangan bulat negatif dinyatakan dengan $\mathbb{Z}_-$.
5. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0\right\}$

Terkadang himpunan memuat himpunan lainnya seperti diberikan pada contoh berikut.

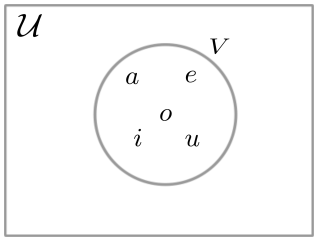
Contoh 5.3. Berikut beberapa contoh himpunan yang anggotanya juga himpunan

1. $\Omega = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ dimana notasi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ seperti di atas.
2. $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

Satu lagi cara menyajikan himpunan adalah dengan menggunakan diagram Venn yang pertama kali diperkenalkan oleh John Venn pada tahun 1881. Dalam diagram Venn, himpunan semesta (*universal*) yang memuat semua elemen yang sedang diamati dinyatakan oleh persegi panjang. Didalamnya digambarkan lingkaran atau bentuk geometri lainnya untuk menyatakan himpunan-himpunan.

Contoh 5.4. Nyatakan dalam bentuk diagram Venn himpunan yang menyatakan hurup vokal dalam alpabet.

Penyelesaian. Kita mempunyai himpunan semesta $\mathcal{U}$ terdiri dari semua huruf alpabet. Selanjutnya, himpunan hurup vokal $V = \{a, e, i, o, u\}$ disajikan sebagai lingkaran di dalam pesegi panjang $\mathcal{U}$. Berikut diagram Venn yang dimaksud.



Gambar 5.1: Himpunan hurup vokal dalam bentuk diagram Venn

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut **himpunan kosong** (*empty set, null set*) dan dinotasikan oleh $\emptyset$ atau $\{\ \}$. Himpunan yang hanya mempunyai satu elemen disebut **himpunan tunggal** (*singleton set*). Sering terjadi kebingunan dalam membedakan himpunan $T = \emptyset$ dan $S = \{\emptyset\}$. Himpunan T adalah himpunan kosong, ia tidak mempunyai anggota, sedangkan S himpunan yang anggotanya himpunan kosong. Jadi S himpunan tunggal yaitu mempunyai satu anggota. Banyak anggota A disebut **kardinalitas** A, ditulis $|A|$.

Contoh 5.5. Berikut contoh nyata himpunan kosong dan himpunan tunggal.

1. A himpunan bilangan prima genap adalah $A = \{2\}$ merupakan himpunan tunggal.
2. $B = \left\{x \in \mathbb{Z}_+ | \, x > x^2\right\}$ merupakan himpunan kosong. Coba diperiksa!

Definisi 5.2. Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari B jika setiap anggota A juga merupakan anggota B, dinotasikan $A \subseteq B$. Dalam bentuk kuantifikasi definisi ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B) \, .$$

Dengan menggunakan definisi ini kita dapat membuktikan fakta berikut:

1. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan. Fakta ini dapat dijelaskan melalui implikasi berikut $x \in \emptyset \rightarrow x \in B$ dimana B himpunan sebarang. Karena proposisi $p : \ x \in \emptyset$ selalu bernilai salah maka implikasi ini bernilai benar. Jadi disimpulkan $\emptyset \subseteq B$.

2. Suatu himpunan merupakan himpunan bagian dari dirinya sendiri, yaitu $A \subseteq A$.

Definisi 5.3. Dua himpunan A dan B dikatakan sama jika setiap anggota A juga merupakan anggota B, dan setiap anggota B juga merupakan anggota A, dan ditulis $A = B$. Dalam bentuk kuantifikasi definisi ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$A = B \leftrightarrow \forall x \in (x \in A \leftrightarrow x \in B) .$$

Berdasarkan kedua definisi ini dapat dipahami bahwa jika dua himpunan sama maka berlaku himpunan bagian, tetapi jika salah satu himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan lainnya belum tentu mereka sama. Dalam kasus ini disebut himpunan bagian sejati (*proper subset*), ditulis $A \subset B$. Dalam bentuk kuantifikasi, himpunan bagian sejati ini dapat dinyatakan sebagai berikut

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x \, (x \in B \wedge x \notin A) .$$

Contoh 5.6. Diberikan dua himpunan $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ dan $B = \{x \,|\, x \, \text{himpunan bagian dari } \{a, b\}\}$. Maka berlaku $A = B$. Diperhatikan bahwa $\{ a \} \in A$ tapi $a \notin A$.

Hati-hati dalam menggunakan notasi $\in$ dan $\subseteq$. Kita mempunyai $\{a\} \subset \{a, b\}$ tetapi $\{a\} \notin \{a, b\}$.

Definisi 5.4. [Himpunan Kuasa] Misalkan A suatu himpunan. Himpunan kuasa (*power set*) dari A ditulis $\mathcal{P}(A)$ atau 2^A adalah koleksi semua himpunan bagian dari A, yakni

$$\mathcal{P}(A) = \{E \,|\, E \subseteq A\} .$$

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, himpunan kosong dan dirinya sendiri pasti menjadi himpunan bagian.

Contoh 5.7. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan berikut.

1. $A_1 = \{1, 2, a\}$
2. $A_2 = \{a, b\}$
3. $A_3 = \{a\}$
4. $A_4 = \emptyset$.

Penyelesaian. Bersamaan dengan penemuan himpunan kuasa masing-masing, kita amati pola kardinalitas himpunan dan himpunan kuasanya.

1. $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, A_1, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Jadi $|\mathcal{P}(A_1)| = 8$ dan $|A_1| = 3$.
2. $2^{A_2} = \{\emptyset, A_2, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Jadi $\left|2^{A_2}\right| = 4$ dan $|A_2| = 2$.
3. $\mathcal{P}(A_3) = \{\emptyset, A_3\} = \{\emptyset, \{a\}\}$. Jadi $|\mathcal{P}(A_3)| = 2$ dan $|A_3| = 1$.
4. $\mathcal{P}(A_4) = \{\emptyset, A_4\} = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$. Jadi $|\mathcal{P}(A_4)| = 1$ dan $|A_4| = 0$.

Berdasarkan pola ini diperoleh hubungan $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. ■

Theorem 5.1. *Misalkan A suatu himpunan. Jika $|A| = n$ maka $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.*

Bukti. Dibuktikan dengan menggunakan prinsip induksi matematika pada n.

- Untuk $n = 0$ maka A adalah himpunan kosong, diperoleh $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$. Perhatikan penjelasan pada contoh sebelumnya.
- Diasumsikan pernyataan ini berlaku untuk $n = k$, yaitu himpunan dengan kardinalitas k mempunyai himpunan kuasa dengan kardinalitas 2^k. Akan dibuktikan himpunan dengan kardinalitas $k + 1$ mempunyai himpunan kuasa dengan kardinalitas 2^{k+1}. Misalkan A_1 himpunan dengan kardinalitas k, ditulis

$$A_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}.$$

Misalkan himpunan kuasanya ditulis $\mathcal{P}(A_1) = \{E_1, E_2, \cdots, E_{2^k}\}$. Untuk A_2 himpunan dengan kardinalitas $k + 1$ dapat diwakili oleh himpunan yang dibentuk dengan menggabungkan A_1 dengan himpunan tunggal $\{w\}$, yaitu

$$A_2 = A_1 \cup \{w\}.$$

Terbentuklah para himpunan bagian baru yang memuat w, yaitu

$$F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_{2^k}$$

dimana $F_j = E_j \cup \{w\}$, $j = 1, 2, \cdots, 2^k$. Karena para himpunan bagian lama tetap menjadi himpunan bagian maka para himpunan bagian A_2 dapat disajikan sebagai berikut

$$\mathcal{P}(A_2) = \{E_1, E_2, \cdots, E_{2^k}, F_1, F_2, \cdots, F_{2^k}\}$$

sehingga total ada $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ anggota. Terbukti $|\mathcal{P}(A_2)| = 2^{k+1}$. ■

5.2 Operasi himpunan

Misalkan A dan B dua himpunan. Kedua himpunan ini dapat dikombinasikan sehingga membentuk himpunan baru. Caranya adalah dengan menggunakan beberapa operasi himpunan berikut

1. Gabungan (*union*): $A \cup B := \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$.
2. Irisan (*intersection*): $A \cap B := \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$. Bila $A \cap B = \emptyset$ maka himpunan A dan B disebut saling asing (*disjoint*).
3. Selisih (*difference*):$A - B := \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$.
4. Selisih simetris (*symetric difference*): $A \oplus B := \{x \,|\, x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$.

Coba ilustrasikan dengan diagram Venn yang menyajikan keempat operasi himpunan di atas. Fakta menarik adalah kardinalitas gabungan himpunan, yaitu

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Fakta ini dapat dijelaskan sebagai berikut: $|A|+|B|$ merupakan kardinalitas A dan B secara sendiri. Bila $A \cap B \neq \emptyset$ maka terjadi dua kali penghitungan untuk anggota $A \cap B$. Padahal dalam gabungan elemen yang sama hanya ditulis satu kali, sehingga harus dikurangi dengan $|A \cap B|$. Bila A dan B saling asing maka berlaku $|A \cup B| = |A|+|B|$.

Operasi gabungan dan irisan dapat diperumum untuk berhingga banyak himpunan, yaitu

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ untuk suatu } i = 1, 2, \cdots, n\}$$

dan

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Komplemen himpunan A adalah himpunan bukan A yang termuat didalam himpunan semesta $\mathcal{U}$, ditulis A^c atau $\overline{A}$ dan didefinisikan oleh

$$A^c := \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

Contoh 5.8. Diberikan himpunan semesta $\mathcal{U}$ adalah bilangan bulat positif kurang dari 10, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Tentukan himpunan $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^c dan $A \oplus B$.

Penyelesaian. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{5\}$, $A^c = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $A \oplus B = \{2, 5, 6, 7\}$. ■

5.3 Identitas himpunan

Terdapat hubungan similaritas antara teori himpunan dan teori logika. Berikut similaritas antara himpunan dan logika.

Teori Himpunan	*Teori Logika*
Himpunan: A	Pernyataan: p
Operasi gabungan: $\cup$	Disjungsi: $\vee$
Operasi irisan: $\cap$	Konjungsi: $\wedge$
Komplemen: A^c	Negasi: $\neg p$
Himpunan semesta: $\mathcal{U}$	Pernyataan TRUE: T
Himpunan kosong: $\emptyset$	Pernyataan FALSE: F

Table 5.1: Similaritas antara himpunan dan logika

Seperti halnya pada logika, pada teori himpunan berlaku identitas berikut.

1. Hukum identitas: $A \cup \emptyset = A$ dan $A \cap \mathcal{U} = A$.
2. Hukum dominasi: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ dan $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. Hukum indempoten: $A \cup A = A$ dan $A \cap A = A$.
4. Hukum komplemen ganda: $(A^c)^c = A$.
5. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$.
6. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dan $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
7. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
8. Hukum De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
9. Hukum absorpsi: $A \cup (A \cap B) = A$ dan $A \cap (A \cup B) = A$.
10. Hukum komplementer: $A \cup A^c = \mathcal{U}$ dan $A \cap A^c = \emptyset$.

Ada beberapa cara untuk membuktikan kesamaan dua himpunan $E = F$, yaitu dengan menggunakan sifat himpunan bagian $E \subseteq F$ dan $F \subseteq E$, menggunakan definisi dengan pembangun himpunan, dan menggunakan bentuk binair keanggotaan himpunan.

Contoh 5.9. Buktikan hukum De Morgan pertama: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dengan menggunakan sifat himpunan bagian.

Bukti. Misalkan $x \in (A \cup B)^c$ maka $x \notin A \cup B$. Jadi berlaku pernyataan $\neg (x \in A \vee x \in B)$. Dengan menggunakan hukum De Morgan pada logika diperoleh pernyataan $\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B)$. Dikembalikan lagi ke definisi himpunan diperoleh $x \notin A \wedge x \notin B$. Dengan definisi komplemen himpunan diperoleh $x \in A^c \wedge x \in B^c$, yaitu $x \in A^c \cap B^c$. Jadi disimpulkan $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Sebaliknya diketahui $x \in A^c \cap B^c$. Maka berlaku $x \in A^c \wedge x \in B^c \rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$. Ini berarti pernyataan $\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B)$ benar. Dengan menggunakan De Morgan pada logika maka diperoleh $\neg (x \in A \vee x \in B)$. Ini dibaca sebagai berikut: tidak benar bahwa $x \in A \cup B$, yaitu $x \in (A \cup B)^c$. Jadi disimpulkan $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Dari kedua hasil ini diperoleh $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. ■

Contoh 5.10. Buktikan hukum De Morgan kedua: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dengan menggunakan pembangun himpunan.

Bukti.

$$\begin{aligned}
(A \cap B)^c &= \{x \mid x \notin A \cap B\} \\
&= \{x \mid \neg (x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid \neg (x \in A) \vee \neg (x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\
&= \{x \mid x \in A^c \vee x \in B^c\} \\
&= A^c \cup B^c. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Representasi keanggotaan dalam bentuk binair adalah dengan menggunakan bit 0 dan 1, dimana 0 menyatakan bukan anggota dan 1 menyatakan anggota. Jadi bila terdapat 3 buah himpunan katakan A, B dan C maka terdapat 8 kemungkinan untuk sebarang elemen x, seperti diberikan pada tabel berikut.

A	B	C	Artinya
1	1	1	$x \in A, x \in B, x \in C$
1	1	0	$x \in A, x \in B, x \notin C$
1	0	1	$x \in A, x \notin B, x \in C$
1	0	0	$x \in A, x \notin B, x \notin C$
0	1	1	$x \notin A, x \in B, x \in C$
0	1	0	$x \notin A, x \in B, x \notin C$
0	0	1	$x \notin A, x \notin B, x \in C$
0	0	0	$x \notin A, x \notin B, x \notin C$

Table 5.2: Notasi binair keanggotaan himpunan

Selanjutnya, operasi himpunan mengikuti operasi logika yang bersesuaian.

Contoh 5.11. Buktikan hukum distributif pertama: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dengan menggunakan representasi binair keanggotaan.

Penyelesaian. Kita bentuk tabel keanggotaan sebagai berikut.

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Table 5.3: Tabel keanggotaan

Pada dua kolom yang berkaitan dengan kedua ruas (diberi warna biru) mempunyai nilai yang sama. Ini menunjukkan bahwa anggota himpunan pada ruas kiri juga merupakan anggota himpunan pada ruas kanan, dan sebaliknya. Terbuktilah kesamaan kedua himpuna pada soal ini. ■

Coba buktikan identitas himpunan lainnya dengan menggunakan berbagai cara yang telah dijelaskan di atas.

5.4 Representasi himpunan pada komputer

Asumsikan himpunan universal $\mathcal{U}$ terbatas, katakan $\mathcal{U} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Himpunan bagian dari $\mathcal{U}$ dinyatakan dalam bentuk string bit dengan panjang n dimana 1 menyatakan anggota dan 0 menyatakan bukan anggota.

Contoh 5.12. Misalkan $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Nyatakan himpunan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B = \{2, 3, 5, 7\}$ dalam bentuk string bit. Sajikan pula $A \cap B$ dalam bentuk string bit.

Penyelesaian. Himpunan semesta $\mathcal{U}$ dinyatakan dalam bit 1 semua yang panjangnya n, yaitu $\mathcal{U} = 11\,11\,11\,11\,11$. Sedangkan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dinyatakan dengan $A = 10\,10\,10\,10\,10$. Bit 1 pada urutan pertama menunjukkan $1 \in \mathcal{U}$ dan $1 \in A$. Bit 0 pada urutan kedua berarti $2 \in \mathcal{U}$ tetapi $2 \notin A$. Begitu juga dengan anggota selanjutnya. Untuk himpunan $B = \{2, 3, 5, 7\}$ disajikan dengan $B = 01\,10\,10\,10\,00$. Penyajian string bit untuk $A \cap B$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (10\,10\,10\,10\,10) \wedge (01\,10\,10\,10\,00) \\ &= (1 \wedge 0)(0 \wedge 1)\,(1 \wedge 1)(0 \wedge 0)\,(1 \wedge 1)(0 \wedge 0)\,(1 \wedge 1)(0 \wedge 0)\,(1 \wedge 0)(0 \wedge 0) \\ &= 00\,10\,10\,10\,00. \end{aligned}$$

Dalam operasi ini telah digunakan $1 \wedge 1 = 1, 1 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 0 = 0$. ■

Contoh 5.13. Nyatakan himpunan dalam string bit berikut $E = 00\,11\,10\,01\,10$ dalam bentuk biasa dimana semestanya seperti contoh sebelumnya.

Penyelesaian. Karena $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ maka $E = \{3, 4, 5, 8, 9\}$. ■

Tugas, kerjakan soal pada Latihan berikutnya! Kumpulkan jawaban yang Anda pahami saja.

6 DASAR-DASAR TEORI FUNGSI

6.1 Pengertian dasar fungsi

6.2 Bentuk-bentuk fungsi

6.3 Fungsi invers dan fungsi komposisi

6.4 Beberapa fungsi pembulatan

DAFTAR PUSTAKA

[1] Orin Averbach, Bonnie adn Chein. *Problem Solving through Recreational Mathematics*. Dover Publication, Inc, 2000.

[2] Thomas Koshy. *Discrete Mathematics with Applications*. Elsevier Academic Press, 2004.

[3] Kenneth H Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications (Sixth Edition)*. Mc Graw Hill, 2007.