

Soal Latihan Analisis Real 1 (Tambahan)

1. Misalkan $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$. Bila $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$ dan g kontinu di b , buktikan $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(b)$!
2. Misalkan f dan g kontinu pada \mathbb{R} dan $S := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$. Jika $(s_n) \subseteq S$ dan $\lim(s_n) = s$, buktikan $s \in S$.
3. Sebuah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan aditif jika berlaku $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan jika fungsi aditif f kontinu di sebuah titik x_0 maka f kontinu di setiap titik pada \mathbb{R} .
4. Sebuah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan multiplikatif jika berlaku $f(xy) = f(x)f(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan jika fungsi multiplikatif f kontinu di $x = 0$ maka f kontinu di setiap titik pada \mathbb{R} . Juga, jika $f(a) = 0$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$ maka buktikan $g(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.
5. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ bersifat bahwa setiap $x \in [a, b]$ terdapat $y \in [a, b]$ sehingga $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Buktikan terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = 0$.
6. Misalkan $I := [0, \pi/2]$ dan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = \sup\{x^2, \cos x\}$ untuk $x \in I$. Buktikan terdapat titik minimum mutlak $x_0 \in I$ untuk f pada I .
7. Diberikan fungsi Dirichlet yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{bila } x \text{ rasional} \\ 0 & \text{bila } x \text{ irrasional.} \end{cases}$$

Buktikan untuk sebarang $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tidak ada.

8. Hitunglah limit satu sisi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$.
9. Diberikan fungsi pada bilangan real $f(x) := x - \lfloor x \rfloor$ dimana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan *flooring* dari x . Buatlah sketsa grafik fungsi f dengan langkah-langkahnya; kemudian tentukan titik-titik dimana fungsi ini tidak kontinu. Berilah alasan!
10. Diberikan fungsi cabang berikut

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & x = 1, \\ 2x - 4 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Buatlah sketsa grafik fungsi ini. Tentukan titik-titik dimana fungsi ini tidak kontinu. Berikan alasan!